よみがえる非ユークリッド幾何

1　公理系

変数はすべて点を表す。

無定義述語は2つ。

D$(abcd)$　a,b 間の距離 c,d 間の距離が等しいことを意味する。以後，$ab \equiv cd$ と書く。

$B(a,b,c)$　b が線分 ac 上の点であることを意味する。a,b,c の中に同一の点を含むことを許容しない。

定義 1 $\mathrm{Col}(a,b,c) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B(a,b,c) \vee B(b,c,a) \vee B(c,a,b)$

定義 2 $\neq (a,b,c) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \neq b \wedge b \neq c \wedge c \neq a$

1.0.1　公理群

公理 A1　$\exists a \exists b \exists c[\neq (a,b,c) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(a,b,c)]$

公理 A2　$\forall a \forall b \forall c \forall d[\mathbf{Col}(a,b,c) \wedge \mathbf{Col}(a,b,d) \rightarrow (\mathbf{Col}(a,c,d) \wedge \mathbf{Col}(b,c,d)) \vee c = d]$

定理 3 $\forall x \forall y[x \neq y \rightarrow \exists z[\neq (x,y,z) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(x,y,z)]]$
どの直線に対しても直線外の点がとれる。

証明. A1 により，$\neq (a,b,c) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(a,b,c)$ とする。
ｉ)x,y が a,b,c のいずれとも等しくないとき，
$\mathbf{Col}(x,y,a), \mathbf{Col}(x,y,b), \mathbf{Col}(x,y,c)$ とすると，
A2 より $\mathbf{Col}(x,a,b), \mathbf{Col}(x,b,c)$
再度 A2 より $\mathbf{Col}(a,b,c)$ となり矛盾。
だから，$\mathbf{Col}(x,y,a), \mathbf{Col}(x,y,b), \mathbf{Col}(x,y,c)$ のうち，
少なくとも一つは偽。
ⅱ)x が a,b,c のいずれかと等しく，y が a,b,c のいずれとも等しくないとき，
たとえば，$x = a$ であるとき，$\mathbf{Col}(x,y,b), \mathbf{Col}(x,y,c)$ とすると，
$\mathbf{Col}(a,b,c)$ となり矛盾するから，
$\mathbf{Col}(x,y,b), \mathbf{Col}(x,y,c)$ のうち，少なくとも一つは偽。
ⅲ)x が a,b,c のいずれかと等しく，y も a,b,c のいずれかと等しいとき，
たとえば，$x = a, y = b$ であるとき，$\neg\, \mathbf{Col}(a,b,c)$ □

以後，冒頭の $\forall a \forall b \forall c \cdots$ を省いて書く。

公理 B1 $B(a,b,c) \rightarrow \neq (a,b,c)$

公理 B2 $B(a,b,c) \to B(c,b,a)$

公理 B3 $a \neq b \to \exists x B(a,x,b) \wedge \exists y B(a,b,y)$

公理 B4 $B(a,b,c) \to \neg B(b,a,c) \wedge \neg B(a,c,b)$

定義 4
$x \in \overline{ab} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \neq b \wedge [x = a \vee B(a,x,b) \vee x = b]$
$x \in \overrightarrow{ab} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \neq b \wedge [x = a \vee B(a,x,b) \vee x = b \vee B(a,b,x)]$
$x \in \overleftrightarrow{ab} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \neq b \wedge [x = a \vee x = b \vee \mathrm{Col}(a,b,x)]$

定理 5 $a \neq b, a \neq c$ のとき，$c \in \overrightarrow{ab}$ ならば $x \in \overrightarrow{ab} \rightleftarrows x \in \overrightarrow{ac}$

定理 6 $a \neq b, a \neq c$ のとき，$c \in \overleftrightarrow{ab}$ ならば $x \in \overleftrightarrow{ab} \rightleftarrows x \in \overleftrightarrow{ac}$

補題 7 $\neq (a,b,c) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(a,b,c) \wedge x \in \overleftrightarrow{ab} \to \neg\, \mathbf{Col}(a,x,c)$

これは，次定理で $y = b$ の場合である。
証明. $\mathbf{Col}(a,x,c)$ と仮定して矛盾を導く。
$x \in \overleftrightarrow{ab}$ なので，$x = a$ または $x = b$ または $\mathrm{Col}(x,a,b)$
$x = a$ のとき，$\neg\, \mathbf{Col}(a,x,c)$ は明らか。
$x = b$ のとき，$\mathbf{Col}(a,b,c)$ となり $\neg\, \mathbf{Col}(a,b,c)$ に反する。
$\mathrm{Col}(x,a,b)$ のとき，$\mathbf{Col}(a,x,c)$ なので A2 より $\mathrm{Col}(a,b,c)$ となり，
$\neg\, \mathbf{Col}(a,b,c)$ に反する。 □

定理 8 $\neq (a,b,c) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(a,b,c) \wedge x \in \overleftrightarrow{ab} \wedge y \in \overleftrightarrow{ab} \wedge x \neq y \to \neg\, \mathbf{Col}(x,y,c)$

証明. $x = a$ のとき，補題の x を y に読み替えれば $\neg\, \mathbf{Col}(x,y,c)$
$x \neq a$ のとき，補題より $\neg\, \mathbf{Col}(a,x,c)$
$\mathbf{Col}(x,y,c)$ と仮定して矛盾を導く。$y \in \overleftrightarrow{ax}$ となるので，
補題で a を x に，b を a に，x を y に置き換えて
$\neq (x,a,c) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(x,a,c) \wedge y \in \overleftrightarrow{xa} \to \neg\, \mathbf{Col}(x,y,c)$
だから，$\neq (x,a,c)$ を示せばよい。
$x \neq a, a \neq c$ は明らかなので $x \neq c$ を示せばよい。
$x = c$ とすると，$x \in \overleftrightarrow{ab}$ より $c \in \overleftrightarrow{ab}$ となるので，
$c = a \vee c = b \vee \mathrm{Col}(a,b,c)$
これらは，いずれも成立しない。 □

公理 B5 （パッシュの公理）

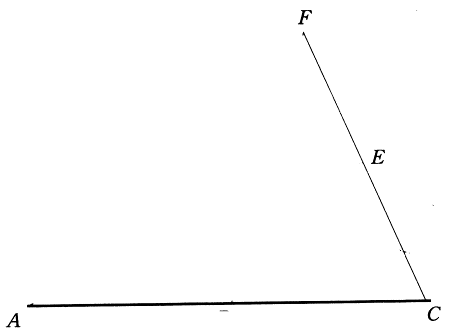
$$\neg\, \mathbf{Col}(a,b,c) \wedge B(a,q,b) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(p,q,a) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(p,q,b) \wedge \neg\, \mathbf{Col}(p,q,c) \\ \to \exists x[\mathrm{Col}(p,q,x) \wedge [B(a,x,c) \vee B(b,x,c)]]$$

補題 9 パッシュの公理の特別な場合
$\neg\,\mathbf{Col}(a,b,c) \wedge B(a,q,b) \wedge [B(p,b,c) \vee B(b,c,p)] \to \exists x[\mathrm{Col}(p,q,x) \wedge B(a,x,c)]$

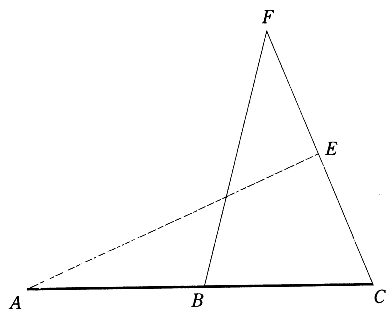
証明. まず，$\neg\,\mathbf{Col}(p,q,a) \wedge \neg\,\mathbf{Col}(p,q,b) \wedge \neg\,\mathbf{Col}(p,q,c)$ を示す。
$\mathbf{Col}(p,q,a)$ とすると，$B(a,q,b)$ より $\mathbf{Col}(p,a,b)$
$B(p,b,c) \vee B(b,c,p)$ より $\mathrm{Col}(p,b,c)$ なので，
$\mathrm{Col}(p,b,c)$ となり $\neg\,\mathbf{Col}(a,b,c)$ に反する。
$\mathbf{Col}(p,q,b)$ とすると，$B(a,q,b)$ より $\mathbf{Col}(p,a,b)$
$B(p,b,c) \vee B(b,c,p)$ より $\mathrm{Col}(p,b,c)$ なので，
$\mathrm{Col}(p,b,c)$ となり $\neg\,\mathbf{Col}(a,b,c)$ に反する。
$\mathbf{Col}(p,q,c)$ とすると，$\mathrm{Col}(p,b,c)$ なので，$\mathrm{Col}(q,b,c)$
$B(a,q,b)$ なので，$\mathrm{Col}(a,b,c)$ となり $\neg\,\mathbf{Col}(a,b,c)$ に反する。
従って B5 を適用できて，$\mathrm{Col}(p,q,x) \wedge [B(a,x,c) \vee B(b,x,c)]$ となる x がある。
$B(b,x,c)$ のとき，$\mathrm{Col}(p,b,c)$ より $\mathrm{Col}(p,x,b)$
$\mathrm{Col}(p,q,x)$ より $\mathrm{Col}(p,q,b)$ となり矛盾。 □

定理 10 $B(a,b,c) \wedge B(b,c,d) \to B(a,b,d) \wedge B(a,c,d)$

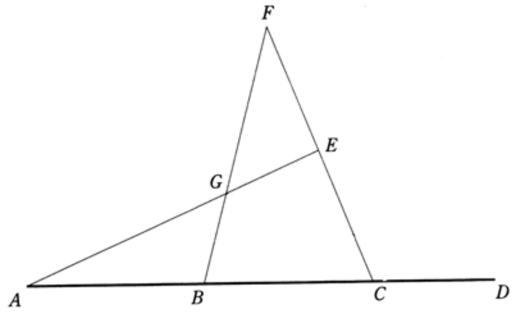
証明. A2 より，$\mathrm{Col}(a,c,d) \wedge \mathrm{Col}(a,b,d)$
定理 1 より，$\neq(a,c,e) \wedge \neg\,\mathbf{Col}(a,c,e)$ となる e をとる。
B3 より，$B(c,e,f)$ となる f をとる。



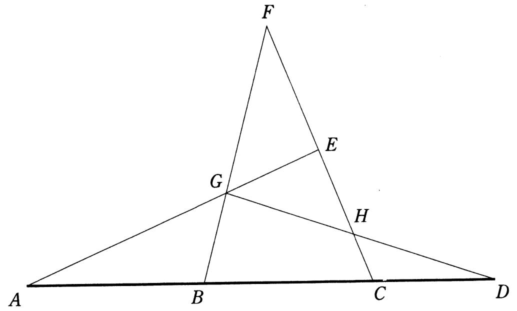
このとき，$\neg\,\mathrm{Col}(a,c,f)$ である。
　なぜなら，$\mathrm{Col}(a,c,f)$ とすると，$B(c,e,f)$ より $\mathrm{Col}(c,e,f)$ なので，
　A2 より，$\mathrm{Col}(a,c,e)$ となり，$\neg\,\mathrm{Col}(a,c,e)$ に反する。



$\triangle bcf$ と直線 ae に上の補題を適用し，
$\mathrm{Col}(a,g,e) \wedge B(b,g,f)$ となる g をとる。



$\triangle ace$ と直線 dg にパッシュの公理 B5 を適用して，
$\mathrm{Col}(d,g,h) \land B(c,h,e)$ となる h をとる。



$\triangle gad$ と直線 eh に補題を適用して
$\mathrm{Col}(e,h,t) \land B(a,t,d)$ となる t がある。
$t \neq c$ とすると，
$\mathrm{Col}(e,h,t) \land \mathrm{Col}(e,h,c)$ より $\mathrm{Col}(e,c,t)$
$\mathrm{Col}(a,t,d) \land \mathrm{Col}(a,c,d)$ より $\mathrm{Col}(a,c,t)$
$\mathrm{Col}(e,c,t) \land \mathrm{Col}(a,c,t)$ より $\mathrm{Col}(a,c,e)$ となり矛盾。
$\therefore t = c$
$\therefore B(a,c,d)$
$B(a,b,d)$ の証明も同様。 □

定理 11 $B(a,b,d) \land B(a,c,d) \to b = c \lor B(a,b,c) \lor B(a,c,b)$

証明. A2 より,$\mathrm{Col}(a,b,c) \lor b = c$
$\mathrm{Col}(a,b,c)$ のとき，$B(a,b,c) \lor B(b,c,a) \lor B(c,a,b)$
$B(a,b,c)$ のとき，結論は正しい。
$B(b,c,a)$ のとき，B2 より $B(a,c,b)$
$B(c,a,b)$ のとき，$B(b,a,c)$ なので前定理より $B(b,a,d)$,
これは $B(a,b,d)$ に反する。 □

公理 C1 $aa \equiv pq \rightleftarrows p = q$

公理 C2 $ab \equiv ba$

公理 C3 $ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \to pq \equiv rs$

定理 12 （**定理** *3.1*） $\equiv$ は同値関係。すなわち

1. $ab \equiv ab$
2. $ab \equiv cd$ ならば $cd \equiv ab$
3. $ab \equiv cd$ かつ $cd \equiv ef$ ならば $ab \equiv ef$

公理 C4 $a \neq b \wedge c \neq p \to \exists! d[B(p,c,d) \wedge cd \equiv ab]$

公理 C5 $B(a_1,b_1,c_1) \wedge B(a_2,b_2,c_2) \wedge a_1b_1 \equiv a_2b_2 \wedge b_1c_1 \equiv b_2c_2 \to a_1c_1 \equiv a_2c_2$

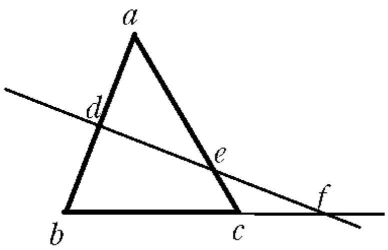
定義 13 $a \neq b$ とする。
$x \sim_{ab} y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = y \vee \neg \exists t[t \in \overleftrightarrow{ab} \wedge B(x,t,y)]$
と定める。

$x \sim_{ab} y$ であることを，x, y は直線 ab に対し同じ側にあるという。

定理 14 $\sim_{ab}$ は同値関係である。すなわち，
$x, y \notin \overleftrightarrow{ab}$ であるとき，
(1) $x \sim_{ab} x$
(2) $x \sim_{ab} y \to y \sim_{ab} x$
(3) $x \sim_{ab} y \wedge y \sim_{ab} z \to x \sim_{ab} z$

証明. $x \sim_{ab} y$ を $x \sim y$ と書く。
(1)，(2) は明らか。(3) を示すために $x \sim y$，$y \sim z$ とする。
$x = y$ のときと $y = z$ のとき結論は明らかなので，$x \neq y, y \neq z$ の場合を考える。
$x \neq z, \mathrm{Col}(a,b,t) \vee t = a \vee t = b, B(x,t,z)$ と仮定して矛盾を導く。
(ｉ) $\mathrm{Col}(x,y,z)$ のとき。
(ｉ-ｉ) $B(x,y,z)$ のとき。
$B(x,t,z) \wedge B(x,y,z)$ より，
$t = y \vee B(x,t,y) \vee B(x,y,t) \vee B(y,x,t)$
(ｉ-ⅱ) $B(y,z,x)$ のとき。
(ｉ-ⅲ) $B(z,x,y)$ のとき。
(ⅱ) $\neg \mathrm{Col}(x,y,z)$ のとき。
パッシュの公理より，$\mathrm{Col}(a,b,u) \wedge [B(x,u,y) \vee B(y,u,z)]$ となる u が存在する。
$B(x,u,y)$ のとき $x \sim y$ に反し，$B(y,u,z)$ のとき，$y \sim z$ に反する。 □

定理 15 三角形の 3 辺すべてと交わる直線は存在しない。



証明. $\triangle abc$ の 2 辺と交わる直線が辺 ab と d で，辺 ac と e で交わるとき，
直線 de と直線 bc との交点を（もしあれば）f とする。
直線 bc は $\triangle ade$ の 2 辺と交わらないから，辺 de と交わらない。
$\therefore B(d,e,f)$ または $B(e,d,f)$
$B(d,e,f)$ のとき，直線 ae は $\triangle def$ の辺 de と交わるから辺 bc と交わる。
だから，c は辺 bf 上の点である。すなわち，$B(b,c,f)$
だから，このとき，f は辺 bc の点ではない。
$B(e,d,f)$ のときも同様。 □
$\neg(x \sim_{ab} y)$ を $x \nsim_{ab} y$ で表す。

定理 16 $x, y \notin \overleftrightarrow{ab}$ であるとき，
(1) $x \nsim_{ab} y \wedge y \sim_{ab} z \to x \nsim_{ab} z$
(2) $x \nsim_{ab} y \wedge y \nsim_{ab} z \to x \sim_{ab} z$

証明. 前定理を用いる。 □

公理 C4(線分の複写) $a \neq b \wedge c \neq p \to \exists! d[B(p,c,d) \wedge ab \equiv cd]$

定理 17 $B(a,b,c_1) \wedge B(a,b,c_2) \wedge bc_1 \equiv bc_2 \to c_1 = c_2$

証明. C4 の一意性部分より □

公理 C5(線分の和) $B(a_1,b_1,c_1) \wedge B(a_2,b_2,c_2) \wedge a_1b_1 \equiv a_2b_2 \wedge b_1c_1 \equiv b_2c_2 \to a_1c_1 \equiv a_2c_2$

定理 18 (線分の差) $B(a_1,b_1,c_1) \wedge B(a_2,b_2,c_2) \wedge a_1c_1 \equiv a_2c_2 \wedge a_1b_1 \equiv a_2b_2 \to b_1c_1 \equiv b_2c_2$

証明. $B(p,a_1,b_1)$ となる p をとる。
C4 より $B(a_1,b_1,d) \wedge b_1d \equiv b_2c_2$ となる点 d をとる。
C5 より $a_1d \equiv a_2c_2$
$\therefore a_1d \equiv a_1c_1$
$B(p,a,d)$ なので前定理より $d = c_1$ □

定義 19 $\triangle abc \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neq(a,b,c) \wedge \neg\mathrm{Col}(a,b,c)$

以後，$\triangle abc$ と書いたときは，上の定義が満たされるものとする。

定義 20 $\triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a_2b_2c_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_1b_1 \equiv a_2b_2 \wedge b_1c_1 \equiv b_2c_2 \wedge c_1a_1 \equiv c_2a_2$

公理 C6(5 辺公理)

$$\triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a_2b_2c_2 \wedge B(a_1,b_1,d_1) \wedge B(a_2,b_2,d_2) \wedge b_1d_1 \equiv b_2d_2 \to c_1d_1 \equiv c_2d_2$$

Note. 線分の和の公理から $\triangle a_1c_1d_1 \equiv \triangle a_2c_2d_2$ もいえる。

定理 21 (補題 4.1)

$$\triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a_2b_2c_2 \wedge B(a_1,d_1,b_1) \wedge B(a_2,d_2,b_2) \wedge b_1d_1 \equiv b_2d_2 \to c_1d_1 \equiv c_2d_2$$

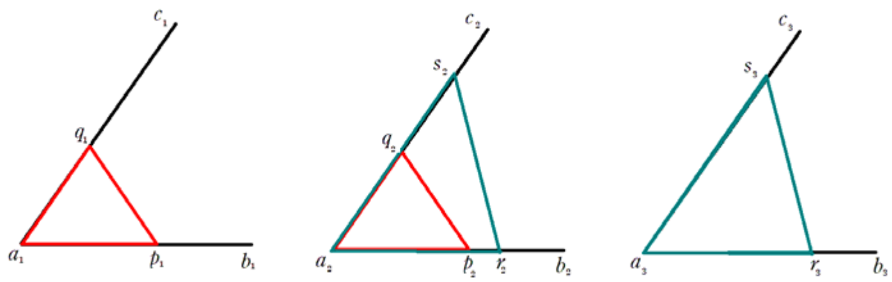
証明. $B(a_1,b_1,e_1)$ となる e_1 をとり，$B(a_2,b_2,e_2) \wedge b_1e_1 \equiv b_2e_2$ となる e_2 をとる。
5 辺公理より $c_1e_1 \equiv c_2e_2$
$\therefore \triangle e_1b_1c_1 \equiv \triangle e_2b_2c_2$
5 辺公理より $c_1d_1 \equiv c_2d_2$ □
補足　線分の差の定理から $a_1d_1 \equiv a_2d_2$ なので，$\triangle a_1d_1c_1 \equiv \triangle a_2d_2c_2$ もいえる。

1.0.2　角

定義 22 $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \triangle b_1a_1c_1 \wedge \triangle b_2a_2c_2$
$\wedge\ \exists p_1 \in \overrightarrow{a_1b_1}\ \exists p_2 \in \overrightarrow{a_2b_2}\ \exists q_1 \in \overrightarrow{a_1c_1}\ \exists q_2 \in \overrightarrow{a_2c_2}[\triangle a_1p_1q_1 \equiv \triangle a_2p_2q_2]$

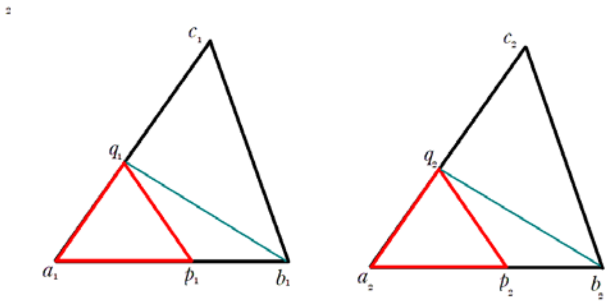
定理 23 (1) $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_1a_1c_1$,$\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle c_1a_1b_1$
(2) $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2 \rightleftarrows \angle b_2a_2c_2 \equiv \angle b_1a_1c_1$
(3) $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2 \wedge \angle b_2a_2c_2 \equiv \angle b_3a_3c_3 \to \angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_3a_3c_3$

証明. (3)
$p_1 \in \overrightarrow{a_1b_1}, p_2 \in \overrightarrow{a_2b_2}, q_1 \in \overrightarrow{a_1c_1}, q_2 \in \overrightarrow{a_2c_2}, \triangle a_1p_1q_1 \equiv \triangle a_2p_2q_2$
$r_2 \in \overrightarrow{a_2b_2}, r_3 \in \overrightarrow{a_3b_3}, s_2 \in \overrightarrow{a_1c_2}, s_3 \in \overrightarrow{a_3c_3}, \triangle a_2r_2s_2 \equiv \triangle a_3r_3s_3$
とする。



$r_1 \in \overrightarrow{a_1b_1}, s_3 \in \overrightarrow{a_1c_1}$ を $a_1r_1 \equiv a_2r_2$,$a_1s_1 \equiv a_2s_2$ となるようにとる。
線分の差の定理より $p_1r_1 \equiv p_2r_2$，$q_1s_1 \equiv q_2s_2$
5 辺公理またはその変種より $\triangle a_1r_1q_1 \equiv \triangle a_2r_2q_2$
5 辺公理またはその変種より $\triangle a_1r_1s_1 \equiv \triangle a_2r_2s_2$
$\triangle a_2r_2s_2 \equiv \triangle a_3r_3s_3$ だから $\triangle a_1r_1s_1 \equiv \triangle a_3r_3s_3$ □

定理 24 (2 辺夾角 SAS) $\triangle a_1b_1c_1$，$\triangle a_2b_2c_2$ において
$a_1b_1 \equiv a_2b_2 \wedge a_1c_1 \equiv a_2c_2 \wedge \angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2 \to \triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a_2b_2c_2$



証明. $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2$ より
$p_1 \in \overrightarrow{a_1b_1}, p_2 \in \overrightarrow{a_2b_2}, q_1 \in \overrightarrow{a_1c_1}, q_2 \in \overrightarrow{a_2c_2}, \triangle a_1p_1q_1 \equiv \triangle a_2p_2q_2$
とする。
線分の差の定理より $p_1b_1 \equiv p_2b_2$
5 辺公理またはその変種より $\triangle a_1b_1q_1 \equiv \triangle a_2b_2q_2$
線分の差の定理より $q_1c_1 \equiv q_2c_2$
5 辺公理またはその変種より $\triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a_2b_2c_2$ □

1.0.3 円円交差公理

CC　与えられた 2 円 A, B が互いに他の外部の点と内部の点を含むならば A と B は交点を持つ。

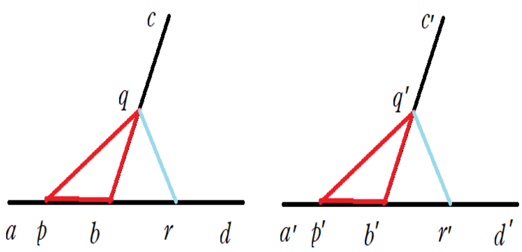
定理 25 《命題 1》 与えられた線分 ab を 1 辺とする正三角形を描くことができる。

1.0.4 垂直

定義 26 a, b, c が同一直線上になく $B(a, b, d)$ であるとき，$\angle dbc$ を $\angle abc$ の**補角**という。

定理 27 $\angle dbc$ を $\angle abc$ の補角，$\angle d'b'c'$ を $\angle a'b'c'$ の補角とするとき，
$\angle abc \equiv \angle a'b'c'$ ならば $\angle dbc \equiv \angle d'b'c'$

証明. 5 点公理の変種 □



定理 28 対頂角は合同である。

1.0.5　対称点

循環論法？

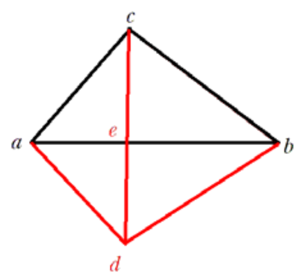
命題 7（p.46）の証明に直線に関する対称点が用いられている。
対称点の存在を示すのに垂線を用いるのか？。
垂線の存在を示す命題 12(p.50) の証明に直角の合同が用いられている。
直角の合同の証明に命題 4.3(b) が用いられている。
命題 4.3(b) の証明に命題 7 が用いられている。

問 29 垂線を用いずに対称点の存在を示せるか？

対称三角形存在の公理　循環論法を避けるために，対称点の存在を意味する公理を追加して先に進む。

Tarski[36] では Ax.21 に相当。他の公理から証明できると書かれている。

公理 30 $\triangle abc \to \exists d[\triangle abc \equiv \triangle abd \wedge \exists e \in \overleftrightarrow{ab}[B(c,e,d)]]$



Note. 5 点公理とその変種を用いると，$ce \equiv de$ となるので，$\triangle ace \equiv \triangle ade$ でもある。
自身の補角と合同になる角を**直角**という。

定理 31 《命題 12》 直線 α と α 上にない点 a があるとき，a から α に垂線を下すことができる。

証明. 上記 Note. □

定理 32 （角の移動定理）$\triangle a_1b_1c_1 \wedge \triangle a_2b_2d \to \exists c_2[(d \backsim_{a_2b_2} c_2) \wedge \angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2]$

証明. $\overrightarrow{a_2b_2}$ 上に $a_1b_1 \equiv a_2b_2'$ となる b_2' をとる。
円円交差公理を用いて $a_2e \equiv a_1c_1, b_2'e \equiv b_1c_1$ となる e をとる。
$d \backsim_{a_2b_2} e$ のとき，$c_2 = e$ とおく。
$d \not\backsim_{a_2b_2} e$ のとき，$\triangle a_2c_2b_2' \equiv \triangle a_2eb_2' \wedge \exists t \in \overleftrightarrow{ab}[B(e,t,c_2)]$ となる c_2 をとる。 □

定理 33 《命題 7》
　線分 ab に関し同じ側にある 2 点 c,d について $ac \equiv ad$ かつ $bc \equiv bd$ ならば $c = d$。

「よみがえる非ユークリッド幾何」p.47 の証明が成立するためには直線外から引いた垂線の一意性が必要。簡単には証明できそうにないので,《命題 7》自体を公理として仮定して進める。Tarski[36] の Ax.20 に相当する。他の公理から証明できるとなっている。

公理 34 線分 ab に関し同じ側にある 2 点 c, d について $ac \equiv ad$ かつ $bc \equiv bd$ ならば $c = d$。

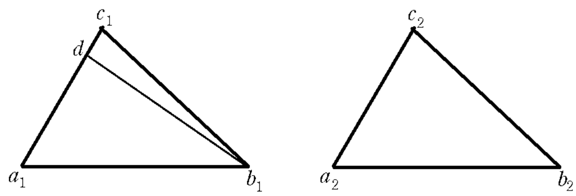
定理 35 $\angle abc$ と $\angle a'b'c'$ がともに直角であれば $\angle abc \equiv \angle a'b'c'$

証明. 《命題 7》より □

定理 36 c, d が直線 ab について同じ側の点で $\angle bac \equiv \angle bad$ ならば d は $\overrightarrow{ac}$ の点である。

証明. 《命題 7》より □

定理 37 一辺両端角合同定理 ASA　$\triangle a_1b_1c_1$，$\triangle a_2b_2c_2$ において
$a_1b_1 \equiv a_2b_2 \wedge \angle b_1a_1c_1 \equiv \angle b_2a_2c_2 \wedge \angle a_1b_1c_1 \equiv \angle a_2b_2c_2 \to \triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a_2b_2c_2$



証明. 半直線 a_1c 上に $\angle a_1b_1d \equiv \angle a_2b_2c_2$ となる点 d をとる。
d と c_2 は直線 a_1b_1 について同じ側にあって $\angle a_1b_1d \equiv \triangle a_1b_1c_1$ なので
d は半直線 b_1c_1 上にある。2 直線の交点は一つしかないので，$d = c_1$。 □

定理 38 《命題 9》 与えられた角を 2 等分することができる。

定理 39 《命題 10》 線分の中点

定理 40 《命題 11》 直線上の点で垂線を立てる。