幾何学演習(1)

I.数学教育史

1.概観

i.　洋算の導入（明治初期）

和算…そろばん

洋算…筆算

明治 5 年「学制」　洋算の導入

西洋数学の優越性　演繹的証明

ii.　明治期の中等教育（旧制中学校）

明治 19 年（1886）　中学校令

小学校 8 年，尋常中学 5 年，高等中学 2 年

明治 35 年（1902）　中学校教授要目

「数学」の内容…算術，代数，幾何，三角法

幾何　徹頭徹尾厳密なる論法に準拠する

この体制は，昭和 17 年まで大きな変化なく続く。

iii.　大正期の数学教育

初等教育　発生的算術，生活算術，作業主義

数学教育改良運動（ペリー運動　不発に終わる）

iv.　昭和期（戦前）

昭和 17 年（1942）中学校理数科数学教授要目

第 1 類（数量）　第 2 類（図形）

関数，微分の初歩，統計，投影図などが導入された。

v.　昭和（戦後）～平成

昭和 22 年（1948）学習指導要領，26 年（1951）改定学習指導要領

コア・カリキュラム，生活単元学習

社会的有用性，生活経験の重視

素材の扱いの難しさ　→　学力低下

昭和 33 年（1958）学習指導要領

系統学習

昭和 44 年（1969）学習指導要領

現代化

中学：記数法，不等式，集合，論理，関数，変換，位相，演算，標準偏差

昭和 52 年（1977）学習指導要領

ゆとり

現代化の軌道修正

授業時数削減

平成元年（1989）学習指導要領

精選，新しい学力観

平成 10 年（1998）学習指導要領

生きる力，厳選

2. コア・カリキュラムと生活単元学習

i. コア・カリキュラム

教科の生活化，統合化

コア　社会科

周辺教科　国語，算数・数学，…

周辺教科はコアの学習に必要な用具を提供する（用具教科）。

ii. 生活単元学習

子ども中心，経験重視

学習主体である子供が，生活環境に働きかけ，その中から問題を発見し，それを解決することを通して学習を深めていく。

昭和 26 年中学校学習指導要領より抜粋

人間は，自分が積極的に参加して経験したことからのみ，その経験を一般化して次の経験に対処する方法を学ぶ。（中略）すなわち，数学が有効に用いられる，あるいは新しい数学が必然的に必要となる場面に生徒が遭遇し，そこにおける問題を生徒が積極的に解決していく過程において，教師が，いろいろ必要な援助を与え，その解決ができるようにしていくとき，生徒は目標とするような一般化を生み出すのである。

このような経験を名づけて，生活経験とよぶならば，数学科の指導内容は，このような生活経験によって，組織されなければならない（中略）。教師は，生徒が次々に一般化して生み出すことが，うまく累積していくように，この生活経験を与えなければならない。

長所

興味や関心をもって積極的に学習に取り組む。

自主的，主体的学習により，生きて働く学力が養われる。

子どもの自主性，計画性や協力的な学習態度を育てることができる。

短所

生活経験に振り回されて，数理の系統や論理性が見失われ，指導の焦点があいまいになる。

問題解決のための基礎的な能力として重要な論理的思考力や計算処理などの能力の育成がおろそかになる。

生活単元カリキュラムの結果

基礎学力が低下

系統学習に移行（昭和 33 年学習指導要領）

3.　20 世紀初頭の数学教育改造運動（ペリー運動）

i.　クライン（Felix Klein，ドイツ）

数学の分化主義を否定し，融合主義をすすめる
幾何学的考察と関数概念を重視する
応用に注意を払う

ii.　ペリー（John Perry，イギリス）

数学は有用なるがゆえに学習される
　　　有用なるがゆえに伝授される
その結果は有用なるがゆえに万人に価値がある。

ユークリッド原論にこだわらない
実験・実測を取り入れた幾何を重視する
座標の幾何，三角法やベクトルを教える
量の測定と数値計算を大事にする（小数，概数，対数，数値表，計算尺）
方眼紙の使用（関数のグラフなど）
微積分の概念を早期に教える

（背景）当時のイギリスの中等数学
ユークリッド原論に忠実
代数的手法に結びつかない
生産や科学技術に結びつかない

iii.　ムーア（E.H.Moore，アメリカ）

ペリーの考えを推奨

4.　数学教育現代化運動(1960 年頃)

i.　現代化運動のねらい

「数学とは何か」を知ることでより多くの数学をより深く学ぶことができる。

集合，写像，ベクトル，行列，確率，数学的構造などの現代数学の概念を取り入れ，学校数学の内容の明確化，単純化，統合化（多くの内容をまとめて学ぶ）を図る。

Euclid Must Go (フランスのデュドネ（Jean Dieudonné）)

（背景）科学技術の高度化，スプートニク・ショック

ii.　日本の現代化学習指導要領

昭和 43 年（1968）小学校学習指導要領
　集合，関数，確率，図形の包摂関係
昭和 44 年（1969）中学校学習指導要領
　中２　数の集合（剰余系など）
　中３　図形の位相的見方
文部省は現職教員を対象として数年間にわたり数学教育現代化講座を実施

昭和 48 年版中学校数学科教科書

1 年（啓林館）

1　数と集合

1　集合

1 集合とその要素

要素(元)，∈，{　}，{｜　}，⊆，⊂，部分集合，真部分集合，

集合の交わりと結び，∩，∪，空集合，ϕ，全体集合，補集合，$\overline{A}$

2 集合の間の関係

3 集合の類別

4　3 つの集合

2　整数の性質

1 商と余り

余りによる類別

2 約数と倍数

3 素因数分解

4 位取り記数法

十進法，五進法，二進法

2　数の拡張

正の数，負の数，有理数，計算法則（交換，結合，分配）

3　文字を使った式

1　文字の式

2　文字の式と集合

1 文字の値と集合

変数，変域

2 等式・不等式と集合

解（の集合)，「$x>0$ かつ $x<5$」の解,

3 方程式とその解

4 やや複雑な方程式

5 方程式の利用

4　変化と対応

1　関数

1 ともなって変わる量

2 集合と関数

対応，　$x \longrightarrow x(10-x)$

3 関数関係と式

4 いろいろな関数関係

2　関数のグラフ

5　資料の調べ方

度数分布表，ヒストグラム，階級，度数，相対度数，累積度数

代表値，平均，メジアン

6　図形の基礎

1　直線と平面

点と直線の距離，点と平面の距離，平面と平面の角，ねじれの位置

2　図形の移動

1 対称移動

2 回転移動と平行移動

3 円と移動

回転移動，平行移動の観点から円を考察

3　図形の構成

1 平面の図形

三角形が定まる条件

円は1点から一定の距離にある点の集合

2 空間の図形

線を動かしてできる図形（角錐，円錐，母線）

面を動かしてできる図形（柱体，回転体）

多面体，正多面体

7　直線でできた図形

1　角と平行線

2　三角形の合同条件

8　図形の計量

1　面積と体積

錐体の体積，球の体積，表面積

2　測定値と計算

有効数字，誤差＝測定値－真の値，近似値，近似値の四則，計算尺

2年（啓林館）

1　不等式

2　式の計算

3　連立方程式

4　一次関数

5　数の集合と計算

1　 数の集合と計算

1　計算の意味と可能性

集合がある演算について閉じている

加減乗除以外の2項演算（大きいほうを表す∨，小さいほうを表す∧）

2　 剰余系

5による剰余系は加減乗除について閉じている。

3 計算の仕組み

単位元と逆元

4　 大小関係

整数の集合は離散的，有理数の集合は稠密

6　確率

1　場合の数

2　確率

7　図形の合同

1　図形の調べ方

1 定理と証明

2 証明の進め方

2　三角形

3　平行四辺形

8　図形の相似

1　相似と比例

2　相似と計量

9　 図形の変換

1　移動とその合成

合同変換

2　いろいろな変換

相似変換，平行光線が作る影

3　移動と拡大・縮小の応用

３年（大日本）

1　式の計算

2　平方根

3　三平方の定理

4　一元二次方程式

5　円と球

1　円周角の定理

2　円と直線，球と直線

6　関数

1　二次関数

$y = ax^2$

2　簡単な関数の値の変化

変化の割合

3　関数と逆関数

1　 逆の対応

2　 逆関数

7　二元一次不等式

8　 統計

1　度数分布とちらばり

偏差，標準偏差

2　相関関係

相関表，相関図

3　 標本調査

母集団，標本，比率の推定，平均値の推定

9　 数学の見方・考え方

1　図形の見方

1 ゴム膜上の図形

2 線のつながり

3 空間図形の線・面のつながり

4 多面体の頂点・辺・面の間の関係

2 数の集合とその組み立て

1 実数の集合と四則演算

2 $\{x\,|\,x=a+b\sqrt{2}$, a, b は有理数$\}$ （選択数学の内容）

iii. 現代化の反動　基礎に帰れ（Back to Basics）

M. Klein ： Why Johnny can't add － The Failure of the New Math.

New Math の導入により基礎能力が低下したという主張にもとづく反動

基礎技能の習得を重視する。

日本はここまで。

米国では，この後，

構成主義（New New Math）

New New Math への反対運動（Math War）

が続く。

II. 幾何

1. ユークリッド幾何

i. ユークリッド原論

定義

点とは部分を持たないものである。

線とは幅のない長さである。

線の端は点である。

面とは長さと幅のみを持つものである。

面の端は線である。

直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき，等しい角の双方は直角であり，上に断つ直線はその下の直線に対して垂線とよばれる。

円とは１つの線で囲まれた平面図形で，その図形の内部にある１点からそれへ引かれたそべての線分が互いに等しいものである。

平行線とは，同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である。

……………（以下，定義が続く。）

公理

公理１　同一のものに相等しいものはまた互いに等しい。

公理２　相等しいものに相等しいものを加えると，結果もまた相等しい。

公理３　相等しいものから相等しいものを引けば，結果もまた相等しい。

公理４　互いに相重なるものは相等しい。

公理５　全体は部分より大きい。

公準

公準１　任意の点とこれと異なる他の任意の点とを結ぶ直線を引くことができる。

公準２　任意の線分はこれを両方へいくらでも延長することができる。

公準３　任意の点を中心として，任意の半径で円を描くことができる。

公準４　直角はすべて相等しい。

公準５　2 直線が 1 直線と交わっているとき，もしその同じ側でできる内角の和が 2 直角より小であったならば，2 直線はその側へ延長すれば必ず交わる。

命題（定理）

命題１　与えられた有限な直線の上に等辺三角形（正三角形）を作る。

ii.　ユークリッドの公理・公準の欠陥

線分 AB が与えられたとき，両端点 A，B を中心として AB の長さを半径とする円を描けば，その交点を C とするとき，三角形 ABC は正三角形になる。しかし，ユークリッドの公理・公準から交点 C の存在を保証することはできない。

有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とするとき，$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 上の解析幾何を考えると，公準１～公準５が成立する。しかし，この幾何学では，２円の交点が存在するとは限らない。だから，ユークリッドの公準のみから２円の交点の存在を導くことは不可能である。

また，定義として掲げられた命題には推論に用いられていないものもある。

iii.　平行線公準と非ユークリッド幾何

ユークリッドの公準 5 は，

1 点 A と A を通らない直線 l が与えられたとき A を通って l に平行な直線は 1 本しかない。

ことと実質的に同じ意味である。これを平行線公準という。

平行線公準を他の公準から導けないかどうかが長い間，問題であった。

平行線公準が成立する幾何をユークリッド幾何，平行線公準が成り立たない幾何学を非ユークリッド幾何という。19 世紀になり，平行線公準は他の公準からは導けないことが示された（ユークリッド幾何のもとで非ユークリッド幾何のモデルが作成された。ある公理系を満たす具体物のことをその公理系のモデルという。ただし，ここでいう具体物は数学における具体物。）

iv.幾何学の基礎

ユークリッド原論では，公理・公準に明確に述べられていない事実が暗黙に使われている。これは，公理を追加することで解決できる。しかし，公理を次々追加していったとき，次のような問題が起こる。

①　この公理体系でどのように論理を展開しても矛盾することがないか？（無矛盾）

②　公理のあるものが他の公理から導かれる定理ではないか？（独立性）

③　公理から定まる体系が一通りに定まるか？（範疇的）

ヒルベルトの「幾何学基礎論」（1899）

無定義述語＋公理

公理系の無矛盾性（モデルの存在を示せばよい）

公理系の独立性（ある公理を否定命題に置き換えた体系が無矛盾であることを示す）

公理系の範疇性（公理系を満たす対象がすべて同型であることを示す）

ヒルベルトの公理系は，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とするとき，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の解析幾何学がモデルになる。したがって，実数論が無矛盾であれば，ヒルベルトの公理系は無矛盾である。

ヒルベルトの公理系はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴの命題群からなっている。Ⅰ，Ⅱは独立ではないが，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴは独立である。このうち，Ⅳが平行線の公理である。

2. 公理系のモデルとは？

例

公理１　平面に含まれるどんな相異なる２点を考えてもそれらを含む直線が少なくとも一つはある。

公理２　平面に含まれるどんな相異なる２点を考えてもそれらを含む直線は１つより多くはない。

公理３　平面に含まれる２つの直線は少なくとも１つの共通な点を含む。

公理４　平面には少なくとも１つの直線が含まれる。

公理５　どんな直線もその平面に含まれる相異なる３点を含む。

公理６　平面に含まれるすべての点が同一直線に含まれることはない。

S＝{A,B,C,D,E,F,G}とし，A,B,C,D,E,F,G を点，S を平面，{E,G,D}，{A,B,D}，{A,C,G}，{E,C,B}，{A,E,F}，{B,F,G}，{C,D,F}を直線と呼べば,公理 1～6 が成立する。

だから，公理１～6 は無矛盾である。また，これらの公理だけからこの平面上に 7 個より多い個数の点があることを導くのは不可能なこともわかるから，これらの公理だけでは，普通の幾何学を展開するのに不十分だということがわかる。

3.学習水準

i.ファンヒーレ(van Hiele)の学習水準理論

水準	対象	方法	
0	具体物	図形	形の弁別を行い，名前を付ける
1	図形	性質	それぞれの図形の性質を知る
2	性質	命題	図形の性質相互の関係。図形の包摂関係などを含む
3	命題	論理	論証幾何
4	論理		幾何の公理系の役割を知る

(1)ある水準をスキップして高位水準に達することはない。

(2)下位水準にとどまっているものは上位水準のことは理解できない。

（注）日本では第２水準の指導はないに等しい。