幾何学演習　Part 2～ 7　　2023 年度

2　距離空間

2-1 距離関数

2-1-1 集合の直積

集合 X ,Y に対し，$X\times Y=\{(x, y)|x\in X, y\in Y\}$

2-1-2 距離関数

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ で表す。

写像 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ が次の性質を持つとき，

集合 X と写像 d の組を距離空間という（d は距離関数と呼ばれる）。

$d(x, y)\geqq 0$

$x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

$d(x, y) = d(y, x)$

$d(x, y) + d(y, z) \geqq d(x, z)$　三角不等式

問題1.　$d: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を，

$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$　ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$

と定めるとき，d は距離関数であることを示せ。

問題2.　$d: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を，

$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})= |b_1-a_1|+|b_2-a_2|$　ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$

と定めるとき，d は距離関数であることを示せ。

問題3.　$\max(x, y)$で x, y のうちの大きい方（正確には小さくない方）を表す。

$d: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を，

$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})= \max(|b_1-a_1| , |b_2-a_2|)$　ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$

と定めるとき，d は距離関数であることを示せ。

問題4.　8 ビット 2 進数の全体を X とする。2 つの 8 ビット 2 進数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し，異なるビットの個数を $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$で表す。たとえば，$\boldsymbol{a}$=11100101，　$\boldsymbol{b}$=11000110 に対し $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=3$。

このとき，d は距離関数であることを示せ。（ハミング距離（Hamming distance）という）

2-2 近傍

(X,d)を距離空間とする。

$x\in X$ と正の数 r に対し，$B(x, r)=\{y\in X \mid d(x, y)<r\}$を x の r-近傍という。

$\mathbb{R}^2$ における通常の距離の場合，x の r-近傍は，x を中心とする半径 r の円の内部。

以降，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ における距離は通常の距離（問題 1 の d）を考える。

2-3 開集合

(X, d)を距離空間とする。$S \subset X$ が開集合（open set）であるとは，

S の各点 x に対し，$x \in B(x, r) \subset S$ となる x の r-近傍 $B(x, r)$（ただし，$r>0$）がとれること。

注意　r は x ごとに異なる。

例　$\mathbb{R}$ の開区間(a, b)は開集合。

問題5.　$\mathbb{R}$ の区間 $[0, 1)$は開集合であるか？

問題6.　$\mathbb{R}^2$ において，単位円の内部$\{(x,y) | x^2+y^2<1\}$は開集合であることを示せ。

問題7.　$\mathbb{R}^2$ において，$\{(x,y) | x^2+y^2 \leqq 1\}$は開集合でないことを示せ。

問題8.　有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で表す。$\mathbb{Q}$ において, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqq 2\}$は開集合であることを示せ。

問題9.　$\mathbb{R}$ において，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，および，無理数全体の集合 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は，どちらも，開集合ではないことを示せ。（集合 A，B に対し，$A-B$ は集合$\{x \in A | x \notin B\}$を表す）

問題10. 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ で表す。$\mathbb{R}$ において，$\mathbb{Z}$ は開集合でないこと，および，整数でない数の全体 $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ は開集合であることを示せ。

問題11. $\mathbb{R}$ において, 1 点のみからなる集合$\{0\}$は開集合ではないことを示せ。また, $\mathbb{Z}$ において, 1 点のみからなる集合$\{0\}$は開集合であることを示せ。$\mathbb{Q}$ において，$\{0\}$は開集合であるか否調べよ。

2-4 集合族の共通部分，和集合

2-4-1 写像による像と逆像

$f : X \to Y$，$S \subset X$，$T \subset Y$ に対し，

$f(S)=\{f(x) \mid x \in S\} = \{y \in Y \mid \exists x \in S\,[y = f(x)]\}$

$f^{-1}(T)=\{x \in X \mid f(x) \in T\}$

変数 x に関する条件命題 $P(x)$に対し，

$\exists x \in X\,[P(x)]$　で,「$P(x)$となる Xの要素 x が存在する」ことを表す。

また，$\forall x \in X\,[P(x)]$　で,「Xのすべての要素 x に対し $P(x)$」を表す。

2-4-2 べき集合

集合の集合を集合族という。

集合族を表すとき，スクリプト体（筆記体）$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}, \mathscr{F}, \cdots$を用いるのが慣例。

集合 X の部分集合全体の集合を $\mathscr{P}(X)$で表す。　($\mathscr{P}$ … Power set，べき集合)

すなわち，$\mathscr{P}(X)=\{S \mid S \subset X\}$

例　$X=\{1,2,3\}$のとき，$\mathscr{P}(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}, X\}$　　（$\varnothing$は空集合を表す）

2-4-3 集合族の∩と∪

$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$とする。（すなわち，$\mathscr{A}$ の要素は X の部分集合）

$\cap\mathscr{A}=\{x \in X \mid \forall S \in \mathscr{A}[x \in S]\}$ …　$\mathscr{A}$に属する集合のうちのすべてに属する $x \in X$ の集合

$\cup\mathscr{A}=\{x \in X \mid \exists S \in \mathscr{A}[x \in S]\}$ …　$\mathscr{A}$に属する集合のうちのどれかに属する $x \in X$ の集合

例　$\mathscr{A}=\{S_1, S_2, S_3\}$のとき，$\cap\mathscr{A}= S_1 \cap S_2 \cap S_3$，$\cup\mathscr{A}= S_1 \cup S_2 \cup S_3$

Note.　$\cap\mathscr{A}$，$\cup\mathscr{A}$ は，それぞれ，$\bigcap_{S\in\mathscr{A}} S$，$\bigcup_{S\in\mathscr{A}} S$ とも書かれる。

注意　$\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$に対し，$\cap\mathscr{A}\subset X$，$\cup\mathscr{A}\subset X$ である。

2-5 距離空間における開集合系

問題12. (X, d)を距離空間とし，$\mathcal{O}$ をその開集合全体の集合とするとき，以下の ⅰ), ⅱ), ⅲ)が成立することを示せ。($\mathcal{O}$ は大文字 O の筆記体)。

ⅰ）　$\emptyset\in\mathcal{O}$，$X\in\mathcal{O}$

ⅱ）　$A\in\mathcal{O}$，$B\in\mathcal{O}$ のとき，$A\cap B\in\mathcal{O}$

ⅲ）　$\mathscr{A}\subset\mathcal{O}$ のとき，$\cup\mathscr{A}\in\mathcal{O}$

問題13. $\mathbb{R}$ の開集合全体の集合を $\mathcal{O}$ とするとき，$\emptyset\neq\mathscr{A}\subset\mathcal{O}$ かつ $\cap\mathscr{A}\notin\mathcal{O}$ であるような $\mathscr{A}$ が存在することを示せ。[ヒント] 具体例を作る。そのような $\mathscr{A}$ が存在するとしたら，それは無限集合である。

3　位相空間

X を集合$(\neq\emptyset)$，$\mathcal{O}\subset\mathscr{P}(X)$とする。

$\mathcal{O}$ が次の性質を満たすとき，$(X, \mathcal{O})$を位相空間という。

ⅰ）　$\emptyset\in\mathcal{O}$，$X\in\mathcal{O}$

ⅱ）　$A\in\mathcal{O}$，$B\in\mathcal{O}$ のとき，　$A\cap B\in\mathcal{O}$

ⅲ）　$\mathscr{A}\subset\mathcal{O}$ のとき，　$\cup\mathscr{A}\in\mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ の要素を開集合と呼ぶ。

$x\in U\in\mathcal{O}$ のとき，U を x の開近傍という。

次の 2 つは位相空間の両極端な例。

問題14. X を集合$(\neq\emptyset)$とし，$\mathcal{O}=\{\emptyset, X\}$とすると，$(X, \mathcal{O})$は位相空間であることを示せ。

問題15. X を集合$(\neq\emptyset)$とし，$\mathcal{O}=\mathscr{P}(X)$とすると，$(X, \mathcal{O})$は位相空間であることを示せ。

問題16. $(X, \mathcal{O})$を位相空間，$\emptyset\neq S\subset X$ とする。このとき，$\mathcal{O}_S=\{O\cap S \mid O\in\mathcal{O}\}$とおくと，$(S, \mathcal{O}_S)$は位相空間であることを示せ。($(S, \mathcal{O}_S)$を部分位相空間という)

注意　$\{O\cap S \mid O\in\mathcal{O}\}$は，$\{O' \mid \exists O\in\mathcal{O}[O'=O\cap S]\}$を意味する。

4　連続写像

4-1 連続写像

$(X, \mathcal{O})$，$(X', \mathcal{O}')$を位相空間とする。

写像 $f: X\to X'$ が連続写像であるとは，任意の開集合 O'に対して $f^{-1}(O')$が開集合であること，すなわち，$\forall O'\in\mathcal{O}'\,[f^{-1}(O')\in\mathcal{O}]$ が成立すること。

4-2 実数の連続関数

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ において，$x\in\mathbb{R}$ とする。次の命題が成立するとき，f は x で連続であるという。

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in\mathbb{R}\,[\,|x'-x|<\delta\to|f(x')-f(x)|<\varepsilon\,]$

Note.　$\forall x'\in\mathbb{R}\,[\,|x'-x|<\delta \rightarrow |f(x')-f(x)|<\varepsilon\,]$ は，

$\{x'\in\mathbb{R} \mid |x'-x|<\delta\}\subset\{x'\in\mathbb{R} \mid |f(x')-f(x)|<\varepsilon\}$と言い換えられる。

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ は，任意の $x\in\mathbb{R}$ で連続であるとき，連続関数であるという。

問題17. 連続関数は連続写像であることを示せ。

[ヒント] 実数の集合 S が開集合であるとは，任意の $x\in S$ に対し，$x\in U\subset S$ となる x の r-近傍 U が存在すること。

問題18. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ が連続写像であるとき，f は連続関数であることを示せ。

5　連結集合

$(X, \mathcal{O})$を位相空間とする。

X と$\emptyset$以外にそれ自身とその補集合がともに開集合であるような部分集合が存在しないような位相空間は連結であるという。

問題19. $(X, \mathcal{O})$を位相空間とする。X が連結であるための必要十分条件は，

$X=O_1\cup O_2$，$O_1\cap O_2=\emptyset$，$O_1\neq\emptyset$，$O_2\neq\emptyset$

となる $O_1\in\mathcal{O}$，$O_2\in\mathcal{O}$　が存在しないことである。

問題20. ただ 1 点のみからなる位相空間は連結であることを示せ。

$\emptyset\neq S\subset X$ のとき，S が部分位相空間として連結であるとき，S は連結部分集合であるという。

問題21. $(X, \mathcal{O})$を位相空間とする。$\emptyset\neq S\subset X$ のとき，S が連結であるための必要十分条件は，

$S\subset O_1\cup O_2$，$O_1\cap O_2\cap S=\emptyset$，$O_1\cap S\neq\emptyset$，$O_2\cap S\neq\emptyset$

となる $O_1\in\mathcal{O}$，$O_2\in\mathcal{O}$　が存在しないことである。

問題22. 写像 $f:X\rightarrow X'$ が連続写像で，$S\subset X$ が連結であるとき，$f(S)$は連結であることを示せ。

問題23. $(X, \mathcal{O})$を位相空間とする。A，B が X の連結部分集合であるとき，$A\cap B\neq\emptyset$であれば，$A\cup B$ は X の連結部分集合であることを示せ。

6　実数の集合

6-1　上界

実数の集合 S に対し，実数 a が S の上界(じょうかい)であるとは，$\forall x\in S\,[x\leqq a]$ が成立すること。

下界(かかい)も同様に定義する。

例　1，2，3，…は，閉区間[0,1]の上界

例　1，2，3，…は，開区間(0,1)の上界

集合 S の最大値は，S の要素であり，かつ，S の上界でもある数。

問題24. 最大値は一意に定まる（高々1 個しか存在しない）ことを示せ。

閉区間[0,1]，開区間(0,1)はどちらも上界を持つが，閉区間[0,1]は最大値を持つのに開区間(0,1)は最大値を持たない。

6-2 最小上界（上限）

上界の最小値を最小上界という。最小値は一意に定まるから，最小上界は一意に定まる。

Note. 最小上界は上限（supremum）とも呼ばれる。

問題25. 閉区間[0,1]，開区間(0,1)は最小上界を持つか。持つときは，その最小上界を求めよ。

最小上界の有無は，どの集合の中で考えるかによって変わる。

有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で表す。

問題26. $S=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2\leqq 2\}$ は，最大値を持たないこと，そして，$\mathbb{R}$ において最小上界を持つが，$\mathbb{Q}$ において最小上界を持たないことを示せ。

6-3 実数の性質

実数には，上界を持つ空でない集合は最小上界を持つ　という性質がある。

この性質は，実数を有理数と区別する特徴的な性質である。ただし，この性質を証明するためには，実数の定義から始める必要がある。

問題27. 区間$[a, b]$は連結であることを示せ。ただし，$a<b$ とする。

ヒント

$[a, b]\subset O_1\cup O_2$，$O_1\cap O_2\cap[a, b]=\varnothing$，$O_1\cap[a, b]\neq\varnothing$，$O_2\cap[a, b]\neq\varnothing$

となる $\mathbb{R}$ の開集合 O_1，O_2 が存在すると仮定する。

ただし，O_1，O_2 のうち，a を含むほうを O_1 としておく。

(1) $S=\{x\in[a, b] \mid [a, x]\subset O_1\}$とおき，$S$ の最小上界を c とする。

(2) $[a, c)\subset O_1$ を示す。

(3) $c\in O_1$ のときと $c\in O_2$ の場合とに分けて，矛盾を導く。

問題28. $\varnothing\neq S\subset\mathbb{R}$ とする。S が連結である必要十分条件は，S に属する $a<b$ であるような任意の 2 数 a, b に対し$[a, b]\subset S$ となることことを示せ。

ヒント

必要性は容易（ただし，慎重に）。

十分性

S に属する $a<b$ であるような任意の 2 数 a, b に対し$[a, b]\subset S$ であるとする。

S が連結でないとすると，

$S\subset O_1\cup O_2$，$O_1\cap O_2\cap S=\varnothing$，$O_1\cap S\neq\varnothing$，$O_2\cap S\neq\varnothing$

となる $\mathbb{R}$ の開集合 O_1，O_2 が存在すると仮定する。

$O_1\cap S\neq\varnothing$，$O_2\cap S\neq\varnothing$ より，$a\in O_1\cap S$，$b\in O_2\cap S$ となる 2 数 a, b がとれる。

このとき，$a<b$ としてよい。（そうでないなら，O_1，O_2 を入れ替える）

（以下，省略）

問題29. 関数 $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ が$[a, b]$で連続であるとき，f の値域 $f([a, b])$は連結であることを示せ。

問題30. 関数 $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ が$[a, b]$で連続で $f(a)<f(b)$ であるとき，$f(a)<y<f(b)$ である任意の y に対し $y=f(c)$となる $c\in[a, b]$が存在すること（中間値の定理）を示せ。

7　コンパクト集合

7-1 コンパクト集合の定義

$(X, \mathcal{O})$を位相空間とし，$S \subset X$ とする。

S がコンパクトであるとは,

任意の $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ に対し, $S \subset \cup \mathcal{U}$ であれば, $\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\mathcal{V}$ で $S \subset \cup \mathcal{V}$ となるものがあること。

問題31. 写像 $f: X \to X'$ が連続写像で，$S \subset X$ がコンパクトであるとき，$f(S)$はコンパクトであることを示せ。

7-2 ハイネ・ボレルの定理

問題32. 実数の有界閉区間$[a, b]$はコンパクト。

[ヒント]　開集合の族 $\mathcal{U}$ が　$[a, b] \subset \cup \mathcal{U}$ を満たすとき,

$$S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subset \cup \mathcal{V} \text{ となる } \mathcal{U} \text{ の有限部分集合 } \mathcal{V} \text{ がある}\}$$

とおくと，S は最小上界 $c \in \mathbb{R}$ を持つ。$c < b$ と仮定して矛盾を導く。

証明

開集合の族 $\mathcal{U}$ が　$[a, b] \subset \cup \mathcal{U}$ を満たすと仮定。

$S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subset \cup \mathcal{V}$ となる $\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\mathcal{V}$ がある$\}$とおいて $b \in S$ を導く。

S は「$a < x$ のとき $x \leqq y \in S$ となる y があれば $x \in S$」という性質を持つ。

$S \ni a$ だから $S \neq \emptyset$。よって，S は最小上界（最小上界）$c \in \mathbb{R}$ を持つ。

b は S の上界だから $c \leqq b$。

$c < b$ と仮定して矛盾を導く。

$c \in \cup \mathcal{U}$ だから $c \in U \in \mathcal{U}$ となる U がある。

$[c-r, c+r] \subset U \cap [a, b]$となる正の数 r を取る。（$c < b$ だから取れる）

$c-r < r$ だから $c-r \in S$。

なぜなら，$c-r \notin S$ なら c が S の最小上界であることに反するから。

$c-r \in S$ より，$[a, c-r] \subset \cup \mathcal{V}$ となる $\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\mathcal{V}$ がある。

このとき $\mathcal{V} \cup \{U\}$は有限集合で，$[a, c+r] \subset \cup(\mathcal{V} \cup \{U\})$ だから $c+r \in S$。

これは，c が S の上界であることに反する。

よって，$b=c$。

最後に $b \in S$ を示す。

$b \in \cup \mathcal{U}$ だから $b \in U \in \mathcal{U}$ となる U がある。

$[b-r, b+r] \subset U$ となる正の数 r を取る。

$b-r \in S$ だから$[a, b-r] \subset \cup \mathcal{V}$ となる $\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\mathcal{V}$ がある。

このとき $\mathcal{V} \cup \{U\}$は有限集合で，$[a, b] \subset [a, b+r] \subset \cup(\mathcal{V} \cup \{U\})$ だから $b \in S$。

ハイネ・ボレルの定理を応用すると，平均値の定理に依存しないで，次の定理を証明することができる。

定理　関数 f:$[a, b]\to\mathbb{R}$ が，$[a, b]$で $f'(x)>0$ であれば，f は区間$[a, b]$で単調に増大する。

　ただし，f が区間$[a, b]$で単調に増大するとは，区間$[a, b]$に属する任意の 2 数 x_1, x_2 に対し，$x_1 < x_2$ であれば $f(x_1) < f(x_2)$となること。

　関数 f:$[a,b]\to\mathbb{R}$ が $x\in[a,b]$で増加の状態にあるとは，x の ε -近傍 U が存在して，$x'\in U\cap[a,b]$ であるとき，$x'<x$ ならば $f(x')<f(x)$，$x<x'$ならば $f(x)<f(x')$ となることをいう。

補題　関数 f:$[a,b]\to\mathbb{R}$ が$[a,b]$の各点で増加の状態にあれば，$f(a)<f(b)$。

なぜなら，

　$[a,b]$の各点 x に対し，$x'\in U\cap[a,b]$であるとき，$x'<x$ ならば $f(x')<f(x)$，$x<x'$ならば $f(x)<f(x')$ となる x の ε -近傍 Uがある。（注意　この近傍は各点 x に対し無数に存在している。なぜなら，より小さい ε をとれば条件を満たすから。）この条件を満たす各点の ε -近傍の全体を $\mathcal{U}$ とする。

　$[a,b]$はコンパクトなので，$\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\mathcal{V}$ で$[a,b]\subset\cup\mathcal{V}$ となるものがある。$\mathcal{V}=\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$とし，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ のうちにいずれかの部分集合であるものがあれば，それを削除し，それらをあらためて $U_1, U_2, \cdots, U_n$ とする。そして，各 U_k の中心を c_k とおき，$c_1<c_2<\cdots<c_n$ の順となるように番号を付け直す。このとき，

ｉ）$U_k\cap U_{k+1}\neq\varnothing$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$

ii）$f(c_k) < f(c_{k+1})$　　$(k=1,2,\cdots,n-1)$

iii) $f(a)<f(c_1) < f(c_2)<\cdots<f(c_n)<f(b)$

問題33. 補題の証明の細部を完成させよ。

問題34. 関数 f:$[a, b]\to\mathbb{R}$ が，$[a,b]$の各点で増加の状態にあれば，f は区間$[a, b]$で単調に増大することを示せ。

問題35. 関数 f:$[a,b]\to\mathbb{R}$ において $x\in[a,b]$とする。$f'(x)>0$ であれば，f は x で増加の状態にあることをどう説明するか。（厳密な証明には極限の厳密な定義が必要）

問題36. 関数 f:$[a, b]\to\mathbb{R}$ において，$[a, b]$で $f'(x)>0$ であれば，f は区間$[a, b]$で単調に増大することを示せ。

8　閉集合

　位相空間$(X, \mathcal{O})$において，X の部分集合 S が閉集合であるとは，S の補集合 $X-S$ が開集合であること。ただし，$X-S=\{x\in X \mid x\notin S\}$。

例　位相空間$(X, \mathcal{O})$が連結であるとは, 開かつ閉である部分集合が X と$\varnothing$以外に存在しないこと。

例　実数の有界閉区間$[a, b]$は閉集合である。

問題37. 位相空間$(X, \mathcal{O})$がコンパクトであるとき，X の閉部分集合はコンパクトである。