9 円周率 π

9.1 π の近似計算

9.1.1 漸化式

問題 1 半径 1 の円に内接する正 n 角形の 1 辺の長さを a_n，外接する正 n 角形の 1 辺の長さを b_n とする。3 以上の自然数 n に対し，次の 2 式が成立する。
(1) $b_{2n} = \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n}$
(2) $a_{2n} = \sqrt{\dfrac{a_n b_{2n}}{2}}$

問題 2 半径 1 の円に内接する正 n 角形の周囲の長さを p_n，外接する正 n 角形の周囲の長さを q_n とする。3 以上の自然数 n に対し，次の 2 式が成立する。
(1) $p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}}$
(2) $q_{2n} = \dfrac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$
[ヒント] $p_n = na_n,\ q_n = nb_n$

9.2 π は無理数（背理法による証明）

9.2.1 $f(x) = \dfrac{b^n}{n!}x^n\left(\dfrac{a}{b} - x\right)^n$

自然数 n を固定し，$f(x) = \dfrac{b^n}{n!}x^n\left(\dfrac{a}{b} - x\right)^n$ とおく。ただし，a, b は自然数。
$f(x)$ の第 j 次導関数を $f^{(j)}(x)$ で表す。すなわち，$f^{(0)}(x) = f(x)$，$f^{(1)}(x) = f'(x)$，$f^{(2)}(x) = f''(x)$，$\cdots\cdots$

問題 3 任意の自然数 j に対し，$f^{(j)}(0)$ は整数。
[ヒント] 二項定理を適用すると $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i a^{n-i}(-b)^i x^{n+i}$

問題 4 任意の自然数 j に対し，$f^{(j)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ は整数。
[ヒント]$f(x) = f\left(\dfrac{a}{b} - x\right)$

9.2.2 $f(x) = \dfrac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n$

自然数 n を固定し，$f(x) = \dfrac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n$ とする。ただし，b は自然数。

問題 5 任意の整数 $j = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ に対し,
$$\int_0^\pi f^{(j)}(x)\sin x dx = f^{(j)}(0) + f^{(j)}(\pi) - \int_0^\pi f^{(j+2)}(x)\sin x dx$$
[ヒント] 部分積分法により,
$$\int_0^\pi f^{(j)}(x)\sin x dx = f^{(j)}(0) + f^{(j)}(\pi) + \int_0^\pi f^{(j+1)}(x)\cos x dx$$
$$\int_0^\pi f^{(j+1)}(x)\cos x dx = -\int_0^\pi f^{(j+2)}(x)\sin x dx$$
を示す。$\sin x = (-\cos x)'$, $\cos x = (\sin x)'$

問題 6 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx = \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(f^{(2j)}(0) + f^{(2j)}(\pi)\right)$

[ヒント] $f(x)$ は $2n$ 次関数なので $f^{(2n+2)}(x) = 0$ だから $\displaystyle\int_0^\pi f^{(2n+2)}(x)\sin x dx = 0$

9.2.3 $\pi = \dfrac{a}{b}$ と仮定

以降, $\pi = \dfrac{a}{b}$(a, b は自然数) と仮定し, $f(x) = \dfrac{b^n}{n!}x^n\left(\dfrac{a}{b} - x\right)^n = \dfrac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n$ とする。

問題 7 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ は整数である。

最後に $0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$ を示す。

問題 8 $c > 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}$

[ヒント] $m > c$ となる自然数 m をとると, $0 < \dfrac{c}{m} < 1$ なので, $\left(\dfrac{c}{m}\right)^k \to 0$ $(k \to \infty)$

問題 9 $\pi = \dfrac{a}{b}$(a, b は自然数) とすると $\dfrac{(b\pi^2)^n}{n!} \leqq \dfrac{1}{3}$ となる自然数 n が存在する。
[ヒント] 前問で $c = b\pi^2$

問題 10 前問の n をとるとき $0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx$

問題 11 前々問の n をとるとき $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx \leqq \frac{2}{3}$

[ヒント]$0 \leqq x \leqq \pi$ において $x(\pi - x) \leqq \pi^2$ なので, $0 \leqq x \leqq \pi$ において $f(x) \leqq \dfrac{1}{3}$。
$\displaystyle\int_0^\pi \sin x dx = 2$。