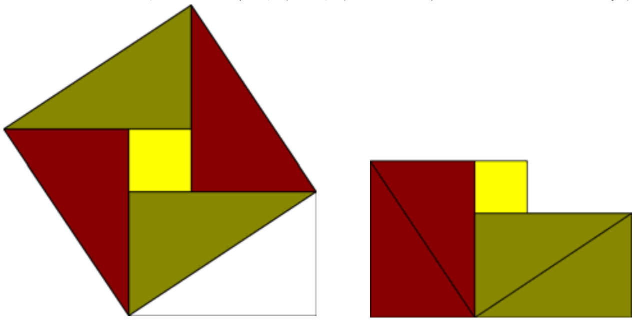
幾何学演習

10　三平方の定理と余弦定理

10.1　三平方の定理と余弦定理

10.1.1　三平方の定理

バスカラの証明　直角三角形の斜辺の正方形を分割して直角を挟む2辺の正方形を作る。



10.1.2　平面上の2点間の距離

平面上の2点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$,$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ に対し，$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$。

10.1.3　正弦と余弦

平面上の点 P に対し，半直線 OP が x 軸の正の向きに対しなす角を反時計周りに測り $\angle x\mathrm{OP}$ で表す。時計回りは負の向きとし，$\angle x\mathrm{OP}$ を負数にして表す。

原点を中心とする半径1の円を単位円という。角 θ に対し，単位円上に $\angle x\mathrm{OP} = \theta$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ を取り，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ とする。

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し，$\mathrm{OP} = r$ とするとき，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。

単位円上の点 P に対し OP=1 だから，
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。ただし，$\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2$ を，$\sin^2\theta$ は $(\sin\theta)^2$ を表す。

10.1.4　正弦定理・余弦定理

△ABC に対し，辺の長さ BC，CA，AB を，それぞれ，a, b, c で表し，$\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ の大きさをそれぞれ，A, B, C で表す。

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

証明
△ ABC の頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を H とすると，CH=$b\sin A = a\sin B$

☆正弦定理の証明に円周角の定理は不要。

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

証明　3点 A(0,0), B(c,0), C($b\cos A, b\sin A$) に対し，

$a^2 = \mathrm{BC}^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

余弦定理から次の公式を導くことができる。

練習 1 $\sin A = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$

正弦定理の別証

上の命題から

$\sin A = a \times \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2abc}$

となるから，正弦定理 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$　を導くことができる（別証）。

10.1.5　三角形の面積

△ ABC の面積を S とすると，$S = \frac{1}{2}bc\sin A$

ヘロンの公式

$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

10.1.6　正弦・余弦の加法定理

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

証明　$\boldsymbol{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \boldsymbol{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$ の内積を計算する。

補足　$\boldsymbol{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \boldsymbol{b} = (\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ の内積を計算すると,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

10.1.7　単振動の合成

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \alpha)$，ただし，$\alpha$ は (a,b) の偏角

なぜなら，$a\cos\theta + b\sin\theta = (a,b)\cdot(\cos\theta, \sin\theta)$

$|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}, |(\cos\theta, \sin\theta)| = 1, (a,b)$ と $(\cos\theta, \sin\theta)$ のなす角は $|\theta - \alpha|$。

10.1.8　2 倍角の公式と和積の公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - \sin^2\alpha$

$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

三角形の外接円

三角形 ABC の外接円の半径を R，中心を O とし，∠BOC＝α，∠COA＝β，∠AOB＝γ とする。$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$ に注意。

三角関数の諸公式（2 倍角，和 $\to$ 積）を用いて（円周角の定理によらないで）

$a=2R\sin\dfrac{\alpha}{2},\quad b=2R\sin\dfrac{\beta}{2},\quad c=2R\sin\dfrac{\gamma}{2},$

$\sin A=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$ から

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ を導く。

練習 2 $a+b-c=8R\sin\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\beta}{4}\cos\dfrac{\gamma}{4}$

$a+b+c=8R\cos\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\beta}{4}\cos\dfrac{\gamma}{4}$

$-a+b+c=8R\cos\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\beta}{4}\sin\dfrac{\gamma}{4}$

$a-b+c=8R\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\beta}{4}\sin\dfrac{\gamma}{4}$

練習 3 $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=8^2R^4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\beta}{2}\sin^2\dfrac{\gamma}{2}$

練習 4 $\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=\dfrac{abc}{R}$

練習 5 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$

円周角の定理

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ は，R,a が同じなら $\sin A$ も同じであることを意味するから，円周角の定理の証明になっている（導出の過程で円周角の定理依存の公式を用いていない）。

また，$a=2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$ なので，$\sin A=\sin\dfrac{\alpha}{2}$

これは，円周角＝$\frac{1}{2}\times$ 中心角　を意味する。

円周角の定理の別証（ベクトルの内積利用）

練習 6 単位円周上に 3 点 $A(\cos\theta,\sin\theta),B(\cos\theta,-\sin\theta),P(\cos\varphi,\sin\varphi)$ を取り，$\cos\angle APB=\cos\theta$ を示す。ただし，$0<\theta<\varphi\leqq\pi$ とする。

ヒント $\left|\overrightarrow{PA}\right|=2\sin\dfrac{\varphi-\theta}{2},\left|\overrightarrow{PB}\right|=2\sin\dfrac{\varphi+\theta}{2}$，$\cos\angle APB=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|}$