幾何学演習　11～15　　2023 年度

すべて，証明を付して答える。別解も考える。(多様な手法の習得をめざす)
黒板では，解を見出す過程を説明する。オープンな問題に対して的確な活動を行う。

Part 1　平面幾何

三角形の合同条件

２つの三角形は次のいずれかの場合，合同となる。

(1)　対応する 2 辺とその 2 辺が挟む角について，辺の長さ，角の大きさが等しい。(SAS)
(2)　対応する 1 辺とその両端の角について，辺の長さ，角の大きさが等しい。(ASA)
(3)　対応する 3 辺について，辺の長さが等しい。(SSS)

平行線の性質

2 直線に 1 つの直線が交わるとき，次のいずれかの場合，2 直線は平行である。

(1) 錯角は等しい
(2) 同位角は等しい
(3) 同傍内角（同側内角）の和は 2 直角である。

逆に，平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき，上の(1)～(3)が成立する（平行線公理)。

三角形の相似条件

２つの三角形は次のいずれかの場合，相似となる。

(1)　対応する 2 辺とその挟む角について，辺の長さの比が等しく，角の大きさが等しい。
(2)　対応する 2 つの角について，角の大きさが等しい。
(3)　対応する 3 辺について，辺の長さの比が等しい。

1　　三平方の定理を用いないで（中 2 レベルで)，対応する斜辺と他の 1 辺の長さが等しい 2 つの直角三角形は合同であることを示せ。
[ヒント]　△ABC と△A'B'C'において，$\angle B = \angle B' = \angle R$，AC=A'C'，BC＝B'C'であるとき，辺 AB の延長上に A"B＝A'B'となる点 A"をとる。($\angle R$ は直角を表す)

2　(1)∠XOY 内の 2 等分線上の点 P から角の 2 辺 OX，OY に下ろした垂線の長さは等しいことを示せ。(2)∠XOY 内の 1 点 P から角の 2 辺 OX，OY に下ろした垂線の長さが等しいとき，点 P は∠XOY の 2 等分線上にあることを示せ。(3)三角形 ABC において各頂角の 2 等分線は 1 点で交わることを証明せよ。

3　(1)A, B を 2 定点とするとき次を示せ。PA＝PB⇔点 P は線分 AB の垂直 2 等分線上にある。
(2)三角形 ABC において 3 辺の垂直 2 等分線は 1 点で交わることを証明せよ。

4　　三角形 ABC において各頂点から引いた中線 AL，BM，CN は 1 点で交わることを証明せよ。[ヒント] 初等幾何限定でも複数の解法がある。さまざまな解法を調べておくこと。

5　　三角形 ABC において，辺 BC の中点を M，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H, 頂角 A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき，次の(1)～(3)は AB＝AC と同値であることを示せ。

(1)　M と H が一致する
(2)　M と D が一致する
(3)　H と D が一致する

6　　三角形 ABC において辺 BC の中点を M とするとき，AM＝BM（＝CM）は，$\angle A = \angle R$ であるための必要十分条件であることを証明せよ。($\angle R$ は直角を表す)

7　三角形 ABC において，辺 BC 上の点を P とするとき，AB : AC＝BP : PC は，線分 AP が頂角 A の 2 等分線であるための必要十分条件であることを証明せよ。[ヒント]複数の解法（平行線，垂線）がある。

8　対角線が交わる四角形を凸四角形という。凸四角形 ABCD において，次の(1)～(5)は同値であることを証明せよ。

(1) AB∥DC，かつ，BC∥AD

(2) AB∥DC，かつ，AB＝DC

(3) AB＝DC，かつ，BC＝AD

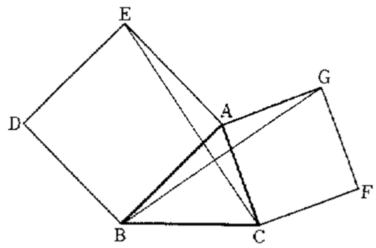
(4) ∠A＝∠C，かつ，∠B＝∠D

(5) 対角線 AC，BD が，互いに他を 2 等分する

[ヒント] たとえば，(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(1)　を示せばよいが，この順でなくてもよいし，ループが分岐してもよいので，証明しやすい形を工夫する。

9　三角形 ABC の外側に 2 つの正三角形 DBA，EAC を作ると，CD＝BE で，CD と BE のなす角は 60°であることを証明せよ。

10　三角形 ABC の AB，AC をそれぞれ 1 辺とする正方形 ABDE,ACFG を図のように作るとき，EC＝BG，EC⊥BG であることを証明せよ。



11　三角形 ABC において，辺 AC の中点を D とし，BD の中点を E とする。直線 AE と辺 BC との交点を F とすれば，FC＝□BF である。

12　平行四辺形 ABCD の辺 AD の中点を M とする。MB＝MC になるのは，この四角形が長方形である場合に限ることを証明せよ。

13　三角形 ABC において，角 A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とし，D を通り，AC，AB にそれぞれ平行にひいた直線が AB，AC と交わる点をそれぞれ E，F とするとき，AD⊥EF であることを証明せよ。

14　三角形 ABC の２つの中線 BE，CF の交点を G とし，BG，CG の中点をそれぞれ H，K とすれば，四角形 EFHK は平行四辺形であることを証明せよ。

15　三角形 ABC の辺 BC 上に点 P がある。P を通る直線で三角形 ABC の面積を 2 等分せよ。

16　∠A＝∠R の直角三角形 ABC において，2 辺 AB，AC を 1 辺とする正三角形 ABD，ACE を三角形の外側に作り，A から BC に下ろした垂線の足を H とすれば，△BDH∽△AEH であることを証明せよ。

17　平行四辺形 ABCD において，対角線 AC 上の点 P を通り，2 辺 AB，AD に平行な直線が AB，BC，CD，DA と交わる点をそれぞれ Q，R，S，T とするとき，QT∥RS であることを証明せよ。

18　三角形 ABC の辺 AB 上に点 D，辺 AC 上に点 E があって，DE∥BC である。BE と CD の交点を P とすると，直線 AP は底辺 BC の中点を通ることを証明せよ。

19　三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の 2 等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とすれば，DE は BC に平行であることを証明せよ。

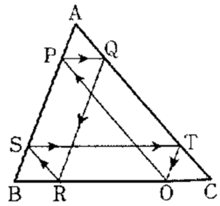
20　三角形 ABC の∠B，∠C の 2 等分線がその対辺と交わる点をそれぞれ D, E とするとき，DE∥BC であるならば，AB＝AC であることを証明せよ。

21　AB＝AC の２等辺三角形 ABC において，底辺 BC 上の任意の点から辺 AB，AC にそれぞれ垂線 PD，PE をひくと，PD＋PE は点 P の位置によらず一定であることを示せ。

22　△ABC の辺 BC の中点を D とし，∠ADB，∠ADC の 2 等分線が，AB，AC と交わる点をそれぞれ E，F とするとき，EF∥BC であることを示せ。

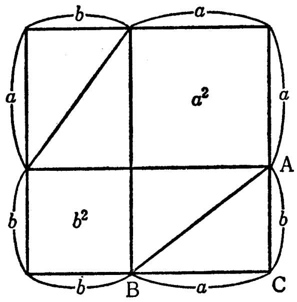
23　三角形 ABC において，D，E をそれぞれ辺 AB，AC 上の任意の点とする。D を通り BE に平行な直線と AC との交点を F とする。また，E を通り CD に平行な直線と AB との交点を G とする。このとき，GF∥BC であることを証明せよ。

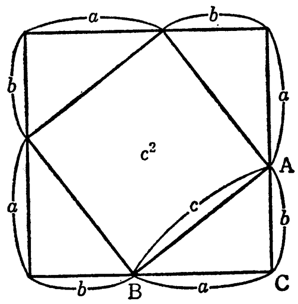
24　三角形 ABC の BC 上の点 O から AC に平行な直線を引き，AB との交点を P とする。次に，P から BC に平行な直線を引き，AC との交点を Q とする。さらに，Q から AB に平行な直線を引き，BC との交点を R とする。同様にして，AB，AC 上に点 S,T を求め，T から AB に平行に引いた直線は点 O を通ることを証明せよ。



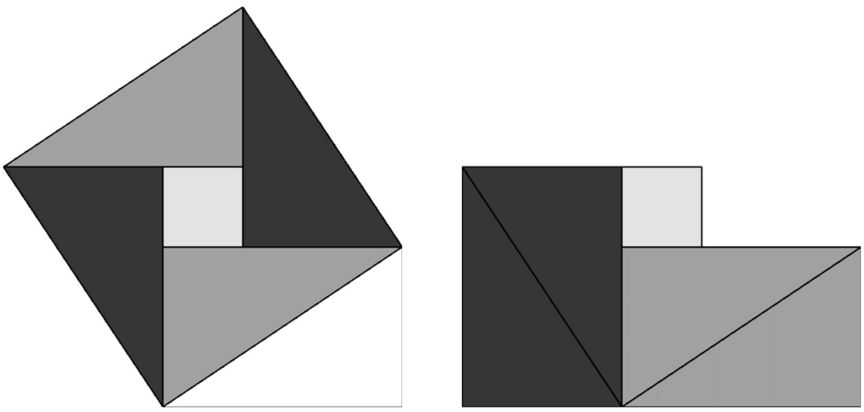
25　角 XOY 内に点 P がある。2 辺 OX，OY 上にそれぞれ点 A，B をとり，線分 AB が P を含んで AP : BP＝1 : 2 となるようにしたい。A，B をどのようにとればよいか。

26　次の図を利用して三平方の定理を証明せよ。





27　次の図を利用して三平方の定理を証明せよ。



28　相似な図形の面積比が相似比の 2 乗であることを利用して三平方の定理を証明せよ。
[ヒント] ∠C＝∠R の直角三角形 ABC において直角の頂点 C から斜辺 AB に下した垂線の足を H とすると, △ACB, △CBH, △ABC は相似で, その相似比は a:b:c。ただし, a=BC, b=CA，c=AB。

29　三角形 ABC において，BC の中点を M とするとき，$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ であることを示せ（座標・ベクトルを使用しない）。

30　2 点 P，Q が直線 AB に対して同じ側にあり，∠APB＝∠AQB であるとき，4 点 A，B，P，Q は同一円周上にあることを証明せよ。

31　円周上に 4 点 A，B，C，D があり，2 直線 AB，CD の交点を P とするとき，AP・BP＝CP・DP であることを証明せよ。（A, B, C, D はこの順に並ぶとは限らない）

また，2 線分 AB，CD が点 P で交わり，AP・BP＝CP・DP であるとき，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることを示せ。

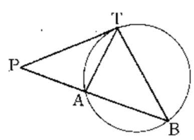
32　ある円において，弧 AB の中点 M を通る 2 つの弦 MC，MD が弦 AB とそれぞれ E，F で交わるとき，4 点 E，C，D，F は同一円周上にあることを示せ。（注意　M は弧 AB 上の点で，弧 AM の長さと弧 MB の長さが等しい）

33　△ABC の垂心 H から中線 AD に下ろした垂線の足を E とすると，4 点 B，C，E，H は同一円周上にあることを示せ。[ヒント AD の延長上に AD＝DF となる点 F をとると，HF が直径になる。]

34　三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AD をひき，AD 上の任意の点 P から AB，AC にそれぞれ垂線 PE，PF をひくと，4 点 E，A，F，P，および 4 点 B，C，F，E はそれぞれ同一円周上にあることを示せ。

35　円において，弦 AB と点 A における円の接線とがなす角は，この角内の弧に対する円周角に等しいことを証明せよ。逆に，点 A を通る直線が弦 AB となす角が，この角内の弧に対する円周角と等しいならば，この直線は接線であることを示せ。

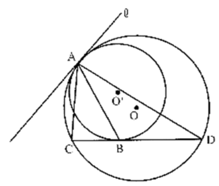
36　円外の点 P からひいた割線を PAB，接線を PT とするとき，$PA\cdot PB=PT^2$ が成り立つことを示せ。逆に，3 点 P，A，B が同一直線上にあり，直線外の点 T について $PA\cdot PB=PT^2$ であれば，PT は三角形 TAB の外接円の接線であることを示せ。



37　図のように，直線 l 上の点 A において，2 円 O，O′ が接している。円 O′ の周上の点 B における接線と円 O との交点を C，D とする。

(1) 直線 l と CD の延長との交点を E とする。∠ABC＝$a°$ とするとき，∠AEB を a を用いて表せ。

(2) AB は∠CAD を 2 等分することを証明せよ。



38　四角形 ABCD が円に外接するとき，AB＋CD＝BC＋AD であることを示せ。

逆に，四角形 ABCD において，AB＋CD＝BC＋AD であれば，この四角形は円に外接することを示せ。

39　円 O 外の 1 点 A からこの円に引いた 2 つの接線の接点を B，C とする。点 A を通る直線が円 O と交わる点を D，E とすると，点 O，D，E を通る円は弦 BC の中点を通ることを示せ。

40　点 P が長方形 ABCD の内部の点であるとき，$AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$ であることを示せ。

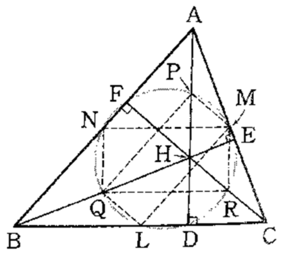
41　三角形 ABC の頂点 A から対辺 BC に垂線 AD をひき, D から AB, AC にそれぞれ垂線 DE, DF をひけば，4 点 B，C，F，E は同一円周上にあることを証明せよ。

42　半径の等しい 2 円が 2 点 A，B で交わるとき，B を通る直線が 2 円とそれぞれ C，D と交わ

れば，AC＝AD となることを証明せよ。

43　三角形 ABC において各頂点から引いた垂線 AD，BE，CF は 1 点で交わることを証明せよ。

44　三角形 ABC の各頂点から対辺に下ろした垂線を AD，BE，CF とし，垂心を H とする。3 辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ L，M，N とし，3 つの線分 AH，BH，CH の中点を，それぞれ P，Q，R とするとき，6 点 L，M，N，P，Q，R は同一円周上にあることを証明せよ。さらに，3 点 D，E，F もその円周上にあることを証明せよ。



45　定線分 AB を 1 辺とする平行四辺形 PABQ において, PA の長さが一定であるとき，角 P と角 Q の 2 等分線の交点の軌跡を求めよ。

46　定線分 AB を直径とする円 O の周上の動点 P より AB に下ろした垂線の足を M とし，半径 OP 上に OM＝ON となる点 N をとるとき，点 N の軌跡を求めよ。

47　1 辺の長さが 8cm の正方形 ABCD がある。辺 BC の中点を M とする。点 P が辺 AB 上を移動するとき，M から線分 PD に下ろした垂線の足を Q とする。点 Q の軌跡を求めよ。また，その長さを求めよ。

48　三角形 ABC において，3 点 P，Q，R をそれぞれ辺 BC，CA，AB の延長上に，または，それらの 2 つを辺上に，1 つを辺の延長上にとるとき，$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ ならば，P，Q，R は 1 直線上にあることを証明せよ。[ヒント] P が辺 BC の延長上にあると仮定しても一般性を損なわない。

49　△ABC の重心を G とし，辺 AB，BC をそれぞれ 1 : 3，3 : 2 の比に内分する点を D，E とする。このとき，3 点 D，G，E は 1 直線上にあることを証明せよ。

50　△ABC 内の 1 点を O とし，AO，BO，CO が対辺 BC，CA，AB と交わる点をそれぞれ D，E，F とする。直線 EF が辺 BC の延長と交わる点を G とすると，BD : DC＝BG : GC であることを証明せよ。

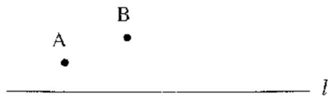
51　同一平面上に２つの三角形 ABC，A'B'C'があって，BC // B'C'，CA // C'A'，AB // A'B'ならば，AA'，BB'，CC'は 1 点で交わるか，あるいはすべて平行であることを証明せよ。

52　2 点 A，B を通る円が 2 点 C，D で円 O と交わり，2 直線 AB，CD が交点 P をもつとき，P から円 O に引いた接線を PT（T を接点とする）とすると，3 点 A，B，T を通る円は円 O に接することを示せ。

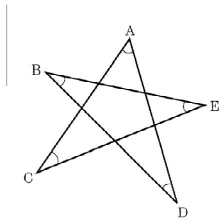
53　２等辺三角形 ABC の頂点 A から底辺 BC に下ろした垂線の足を D とし，D から AB に下ろした垂線の足を E とする。点 E を通って BC に平行に引いた直線が△ABC の外接円と交わる点を F とすると，AF＝AD であることを示せ。[ヒント]　$AD^2 = AB \cdot AE$，$AF^2 = AB \cdot AE$

54　定円 O に接し，円外の 2 定点 A，B を通る円を作図せよ。
[ヒント]　AB の垂直 2 等分線上 l に中心 O があるときは，l，O の交点と，A,B の 3 点を通る円を描けばよい（2 つの円が描ける）。そうでないとき，2 点 A，B を通り円 O と 2 点 C，D で交わる円を描き，2 直線 AB，CD の交点を P として，P から円 O に接線を引く。

55　直線 l 上に，$\angle$APB＝30°となる点 P をすべて作図せよ。



56　右図の星型五角形において，



（1）角 A～角 E の外角の和を求めよ。
（2）角 A～角 E（内角）の和を求めよ。
[ヒント] (1)から(2)を導ける。

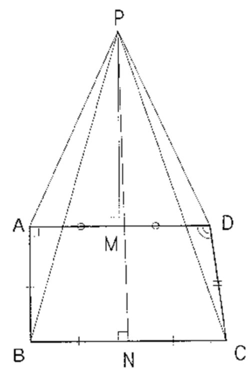
57　△ABC∽△ADE であるとき△ABD∽△ACE であるといえるか。　△ABC∽△ADE ならば△ABD∽△ACE といえるのは，どのような場合か（十分条件を答えればよい）。

58　三角形 ABC の頂点 A より$\angle$B，$\angle$C の 2 等分線に垂線 AD，AE をひくと，DE // BC であることを証明せよ。

59　次に示すのは，直角は鈍角に等しいことの証明である。推論の誤りがあれば指摘せよ。

四角形 ABCD で，$\angle$A は直角，$\angle$D は鈍角，かつ，AB＝CD とする。

AD の中点を M，BC の中点を N とし，AD の垂直 2 等分線と BC の垂直 2 等分線の交点を P とする（AD // BC とはなりえないから交点は存在する）。



△PAB と△PDC において，PA＝PD，PB＝PC，AB＝CD だから，

△PAB≡△PDC

ゆえに，　$\angle$PAB＝$\angle$PDC

一方，$\angle$PAM＝$\angle$PDM だから，

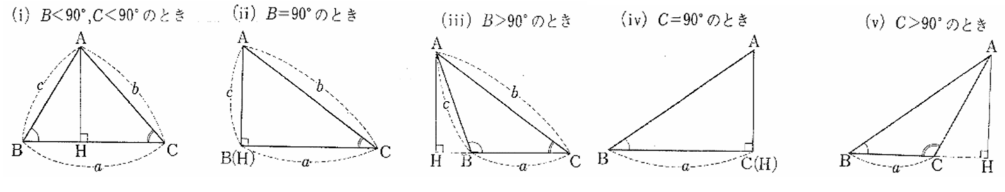
$\angle$MAB＝$\angle$PAB－$\angle$PAM＝$\angle$PDC－$\angle$PDM＝$\angle$MDC

すなわち，直角$\angle$MAB は鈍角$\angle$MDC に等しい。

図形の計量

以下，三角形 ABC において，AB＝c，BC＝a，CA＝b，$\angle$A＝A，$\angle$B＝B，$\angle$C＝C，外接円の半径を R とする。

60　次の図を利用して $a=b\cos C+c\cos B$ を示せ。



61　前問の結果と，$B+C=180°-A$，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ を用いて

$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$　を導け。

62　(1) ベクトルの和$\vec{a}+\vec{b}$の定義を述べよ。
(2) 結合法則$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$を証明せよ。

63　点 P(x_0，y_0) から直線 $ax+by+c=0$ に下した垂線の長さは$\dfrac{|ax_0+bx_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であることを示せ。

[ヒント]ベクトルを利用する場合とベクトルを用いない場合について考える。

64　$\sin 2A \cos B = \cos A \sin C$ であるとき，△ABC はどんな三角形か。

65　鋭角三角形 ABC において各頂点から対辺に下ろした垂線をそれぞれ AL, BM, CN とし，垂心を H とするとき，$\mathrm{AH} = \dfrac{a}{\tan A}$ であることを示せ。

66　三角形 ABC において辺 BC の中点を D とする。さらに，B，C から対辺またはその延長上に下ろした垂線の足を E，F とする。三角形 DEF が正三角形であるとき，∠A の大きさはいくらか。

67　三角形 ABC において，∠C の 2 等分線と辺 AB との交点を D，∠B の 2 等分線と辺 AC との交点を E とする。

(1)　BE^2，CD^2 を a，b，c を用いて表せ。

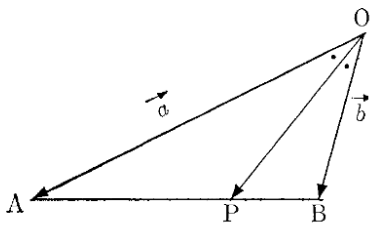
(2)　BE＝CD ならば AB＝AC であることを示せ。

68　底辺 BC と平行な直線で三角形 ABC の面積を 2 等分せよ。

69　△ABC の辺 BC の中点を M とするとき，$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$であることを複数（中学校，三角比，解析幾何，ベクトル）の方法で証明せよ。

70　△OAB において頂角 O の 2 等分線と辺 AB との交点を P とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。ヒント　$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

∠AOP＝∠BOP より$\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{a}||\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{b}||\overrightarrow{OP}|}$

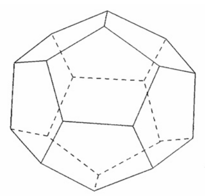


71　△ABC で∠BAC＝60°，AB＝10，AC＝15，∠BAC の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とする。

(1) 中学校までの学習内容を用いて，線分 AD の長さを求めなさい。

(2) 高等学校で学習する内容を用いて，線分 AD の長さを求めなさい。

(3) (1)と(2)の解き方を振り返って，一つの問題について様々な解法を高校生に指導することの意義を，評価の観点である「関心・意欲・態度」,「数学的な見方や考え方」,「表現・処理」,「知識・理解」の 4 つの用語をすべて使って，具体的に述べなさい。



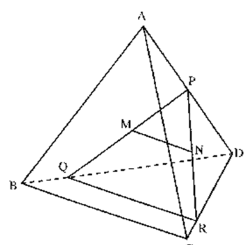
Part2　空間幾何

72　1 辺の長さが 6cm の正十二面体がある。

(1) この十二面体の 1 つの面である正五角形の対角線の長さを求めよ。

(2) この正十二面体の 8 つの頂点を結ぶと，この正十二面体の中に正六面体をつくることができる。この正六面体の表面積を求めよ。

73　図のように 1 辺の長さが 4 の正四面体 ABCD があり，点 P は辺 AD 上を，点 Q は辺 BD 上を，点 R は辺 CD 上を動く。PQ，PR の中点をそれぞれ M，N とするとき，次の各問いに答えよ。



(1) 点 Q，R をそれぞれ頂点 B，C に固定し，点 P が辺 AD 上を頂点 A から D まで動くとき，線分 MN が動いてできる図形の面積を求めよ。

(2) 点 P を頂点 A に固定し，BC∥QR を満たしながら点 Q が頂点 B から D まで動くとき，線分 MN が動いてできる平面図形と，(1)でできた平面図

形，および，△ABD，△ACD，△BCD で囲まれた立体の体積を求めよ。

74　正多面体が 5 種類しかないのは，なぜか。中学校 1 年生にわかるように説明せよ。

75　正 8 面体の各面の中心を結んでできる立方体の体積は，元の正 8 面体の体積の何倍か
[Note] 正 8 面体の各面は正三角形なので，外心＝内心＝重心＝垂心。それを中心という。

空間における 2 直線

2 直線を含む平面が存在してその平面内で平行な 2 直線は平行であるという。
共有点を持たず，平行でもない 2 直線はねじれの位置にあるという。

2 平面のなす角

2 平面の交線に垂直な 2 平面内の 2 直線のなす角を，2 平面のなす角という。

平面と直線の垂直

平面 α と直線 l が垂直である($l\perp\alpha$)とは，1 と α が交点 P を持ち，P を通る α 内のすべての直線と l が垂直であること。
定理　平面内の交わる 2 直線と垂直な直線はこの平面と垂直。

76　A は平面 α 外の点，O は α 上の点で，AO$\perp\alpha$ とする。a は平面 α 上の O を通らない直線で，O から a に下ろした垂線の足を B とする。このとき，AB$\perp\alpha$ であることを証明せよ。
［ヒント］$a\perp$平面 ABO を示す。

直線の方程式

点 $P(x_0, y_0, z_0)$を通りベクトル $\boldsymbol{v}=(a, b, c)$に平行な直線の方程式は，$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$
ただし，分母が 0 のときは 分子＝0 を意味するものとする。

平面の方程式

平面の方程式の一般形は，$ax+by+cz+d=0$。ただし，$a^2+b^2+c^2\neq 0$。

77　空間内に 3 点 A(2,1,2)，B(1,2,2)，C(0,0,c) がある。
(1) 3 点 A，B，C を通る平面の方程式を求めよ。
(2) 3 点 A，B，C を通る平面と x 軸，y 軸との交点の座標を c で表せ。

78　直方体 ABCD-EFGH の 3 辺の長さを AB=1，AD=2，AE=3 とする。辺 BF 上に点 P をとり，A,P,G を通る平面によるこの直方体の切り口が菱形になるようにしたい。BP の長さをいくらにすればよいか。

補充問題　雑題

79　座標平面上で x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という。頂点がすべて格子点である多角形において，多角形の周上の格子点の個数を N，多角形の内部にある格子点の個数を P とするとき，多角形の面積を N，P で表せ。
[ヒント] 予想を立て，数学的帰納法で証明する。はじめに，三角形を考える。