

教育課題演習「数学を作る」第2回

1. ビットに対する2項演算

集合{0,1}上の2項演算は全部で 通りある。

主要な2項演算

$a \backslash b$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$a \times b$$

$$a \wedge b$$

$a \backslash b$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b$$

$$(a+b) \bmod 2$$

$a+b$ を 2 で割った余り

2進法で $a+b$ の 1 の位

$a \backslash b$	0	1
0	0	1
1	1	1

$$a \vee b$$

2. パリティ検査

英数字の全体は 128 個以内に収まるので、符号に 7 ビット、検査用に 1 ビットの冗長ビットを追加した 8 ビットで通信を行う規格が作られた。

たとえば、符号ビットが $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ のとき、 $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_7$ を 8 ビット目に追加する。

8 ビットだと数が多すぎるので、3 ビットのデータにパリティ・ビットを追加した 4 ビットの符号を考えてみる。

x_1	x_2	x_3	c_1
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$$c_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

パリティ・ビットを追加して送信すると、伝送の誤りが 1 ビット以下であると仮定できるとき、受信側で誤りの有無を知ることができる（なぜか？）。

3. 誤り訂正符号

(1) 3ビットのデータに3ビットの冗長ビットを追加して、伝送誤りが1ビット以内であれば、どのビットが誤りであるか検出できるようにしよう。

符号	x_1	x_2	x_3	$c_1=$	$c_2=$	$c_3=$
u_1	0	0	0			
u_2	0	0	1			
u_3	0	1	0			
u_4	0	1	1			
u_5	1	0	0			
u_6	1	0	1			
u_7	1	1	0			
u_8	1	1	1			

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1								
u_2								
u_3								
u_4								
u_5								
u_6								
u_7								
u_8								

(2) 4ビットのデータに3ビットの冗長ビットを追加して、伝送誤りが1ビット以内であれば、どのビットが誤りであるか検出できるようにできるか。