

教育課題演習「数学を作る」第3回

1. 誤り訂正符号の構成

4ビットのデータに3ビットの冗長ビットを追加する。

$$c_1 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, \quad c_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4, \quad c_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$$

符号	x_1	x_2	x_3	x_4	c_1	c_2	c_3
u_1	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	0	1	1	1	1
u_3	0	0	1	0	1	1	0
u_4	0	0	1	1	0	0	1
u_5	0	1	0	0	1	0	1
u_6	0	1	0	1	0	1	0
u_7	0	1	1	0	0	1	1
u_8	0	1	1	1	1	0	0
u_9	1	0	0	0	0	1	1
u_{10}	1	0	0	1	1	0	0
u_{11}	1	0	1	0	1	0	1
u_{12}	1	0	1	1	0	1	0
u_{13}	1	1	0	0	1	1	0
u_{14}	1	1	0	1	0	0	1
u_{15}	1	1	1	0	0	0	0
u_{16}	1	1	1	1	1	1	1

2. 文字式の計算

集合 $\{0,1\}$ 上の2項演算 \oplus の性質

$$a=0,1 \text{ に対し, } a \oplus a = 0$$

$$c_1 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, \quad c_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4, \quad c_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$$

$$c_1 \oplus c_2 =$$

$$c_2 \oplus c_3 =$$

$$c_3 \oplus c_1 =$$

$$c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 =$$

3. 伝送誤りの表現

a	$1 \oplus a$
1	0
0	1

4. 伝送誤りの検出

7ビットの符号 $x_1' x_2' x_3' x_4' c_1' c_2' c_3'$ を受信したとき,

$$p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2'$$

$$p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3'$$

$$p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3'$$

を計算する。

Note. $x_3' \oplus x_1' \oplus c_3' \oplus c_1' = p_1 \oplus p_2$ なので, $x_3' \oplus x_1' \oplus c_3' \oplus c_1'$ は p_1, p_2 から求まる。

次の (1) ~ (8) の各場合について, 上述の各式の値を求めよ。

(1) 誤りなく伝送されたとき, すなわち,

$$x_1' = x_1, x_2' = x_2, x_3' = x_3, x_4' = x_4, c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_3 \text{ のとき}$$

$$p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' =$$

$$p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

$$p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

(2) 1ビット目のみか誤って伝送されたとき, すなわち,

$$x_1' = 1 \oplus x_1, x_2' = x_2, x_3' = x_3, x_4' = x_4, c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_3 \text{ のとき}$$

$$p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' =$$

$$p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

$$p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

(3) 2ビット目のみか誤って伝送されたとき, すなわち,

$$x_1' = x_1, x_2' = 1 \oplus x_2, x_3' = x_3, x_4' = x_4, c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_3 \text{ のとき}$$

$$p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' =$$

$$p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

$$p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

(4) 3ビット目のみか誤って伝送されたとき, すなわち,

$$x_1' = x_1, x_2' = x_2, x_3' = 1 \oplus x_3, x_4' = x_4, c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_3 \text{ のとき}$$

$$p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' =$$

$$p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

$$p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =$$

(5) 4ビット目のみか誤って伝送されたとき, すなわち,

$$\begin{aligned}
 & x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = 1 \oplus x_4, \quad c_1' = c_1, \quad c_2' = c_2, \quad c_3' = c_3 \quad \text{のとき} \\
 & p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' = \\
 & p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' = \\
 & p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =
 \end{aligned}$$

(6) 5ビット目のみが悪って伝送されたとき、すなわち、

$$\begin{aligned}
 & x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4, \quad c_1' = 1 \oplus c_1, \quad c_2' = c_2, \quad c_3' = c_3 \quad \text{のとき} \\
 & p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' = \\
 & p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' = \\
 & p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =
 \end{aligned}$$

(7) 6ビット目のみが悪って伝送されたとき、すなわち、

$$\begin{aligned}
 & x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4, \quad c_1' = c_1, \quad c_2' = 1 \oplus c_2, \quad c_3' = c_3 \quad \text{のとき} \\
 & p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' = \\
 & p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' = \\
 & p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =
 \end{aligned}$$

(8) 7ビット目のみが悪って伝送されたとき、すなわち、

$$\begin{aligned}
 & x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4, \quad c_1' = c_1, \quad c_2' = c_2, \quad c_3' = 1 \oplus c_3 \quad \text{のとき} \\
 & p_1 = x_1' \oplus x_2' \oplus c_1' \oplus c_2' = \\
 & p_2 = x_2' \oplus x_3' \oplus c_2' \oplus c_3' = \\
 & p_3 = x_4' \oplus c_1' \oplus c_2' \oplus c_3' =
 \end{aligned}$$

5. 伝送誤りの訂正

伝送誤りが1ビット以下であると仮定できるとき、受信結果から(1)～(8)のいずれが起ったか判定する方法を述べよ。

	p_1	p_2	p_3
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			
(5)			
(6)			
(7)			
(8)			