

## 教育課題演習 第 12 回 一次不定方程式

### 1. 1 次不定方程式 $ax+by=1$

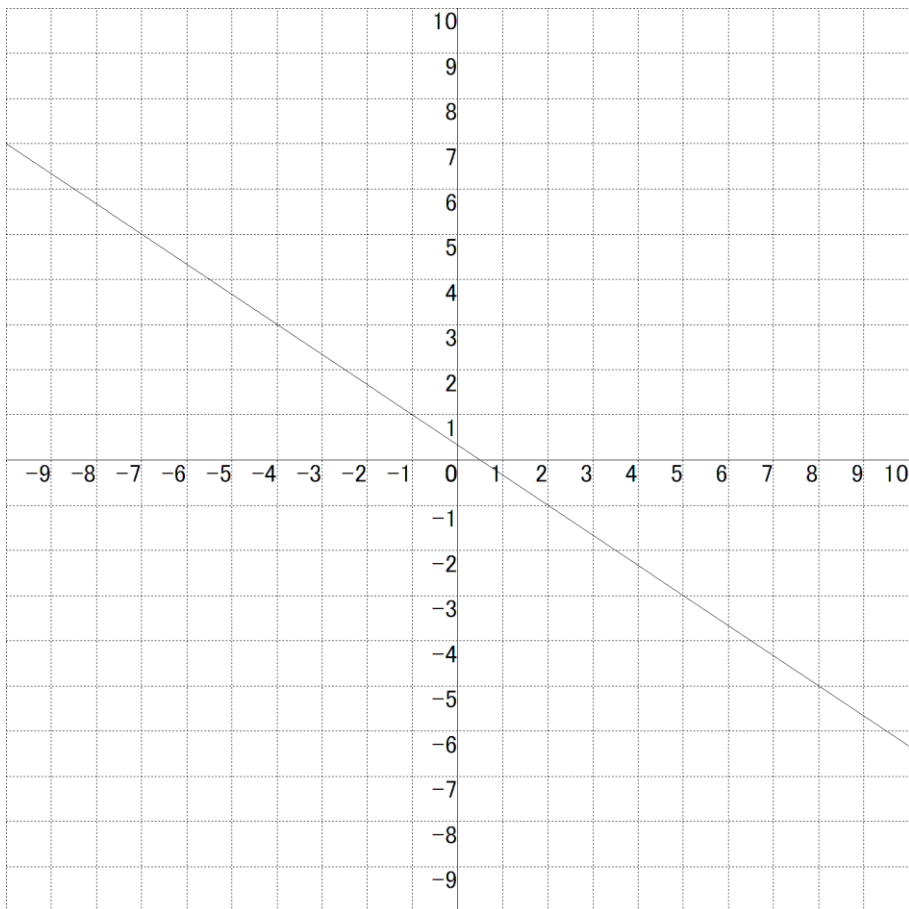
(1) 無数の解を持つことがある

$x, y$  に関する一次方程式  $ax+by=1$  の整数解を求める。

解を持つとは限らない。たとえば、 $6x+8y=1$ 。

解を持つときは、無数の解が存在するので、不定方程式と呼ばれる。

例えば、 $2x+3y=1$  の解は  $x=5, y=-3$  のほか、無数にある。



(2) 解をひとつ求める。

例  $103x+30y=1$  の整数解を一つ求める。

$103=30 \times 3+13$  なので、 $30(3x+y)+13x=1$

$x_1=3x+y$ ,  $y_1=x$  とおくと、 $30x_1+13y_1=1$

$30x_1+13y_1=1$  の解が求まれば、 $x=y_1$ ,  $y=x_1-3x$  から  $x, y$  が求まる。

$30=13 \times 2+4$  なので、 $13(2x_1+y_1)+4x_1=1$

$x_2=2x_1+y_1$ ,  $y_2=x_1$  とおくと、 $13x_2+4y_2=1$

$13=4 \times 3+1$  なので、 $4(3x_2+y_2)+x_2=1$

$x_3=3x_2+y_2$ ,  $y_3=x_2$  とおくと、 $4x_3+y_3=1$

$y_3$  の係数は 1 なので、 $x_3=0$ ,  $y_3=1$  はこの方程式を満たす。

$x_2=y_3=1$ ,  $y_2=x_3-3x_2=0-3 \times 1=-3$

$x_1=y_2=-3$ ,  $y_1=x_2-2x_1=1-2 \times (-3)=7$

$x=y_1=7$ ,  $y=x_1-3x=-3-3 \times 7=-24$

問題 1 次の方程式の整数解を (ひとつ) 求めよ。ただし、存在しないこともある。

(1)  $57x+23y=1$

(2)  $52x+21y=1$

(3)  $47x+33y=1$

(4)  $124x+51y=1$

(5)  $85x+51y=1$

(6)  $113x+55y=1$

問題 2 一次方程式  $ax+by=1$  が整数解を持つのはどのような場合か。