幾何学概論（1）平面幾何　作図

1.　定規とコンパスによる作図

(1) 定規とコンパスによる作図の約束

定規は，与えられた 2 点を結ぶ直線（または半直線，線分）をひく。

コンパスは，2 点 A,B が与えられたとき，A を中心として B を通る円を描く。

直線と直線，直線と円，円と円の交点を(上記の)与えられた点として利用してよい。

平面上，直線上，半直線上，線分上あるいは円周上に任意個の点をとることができる。

平面上にいくつかの直線があるとき，そのいずれにも属さない点をとることができる。

定規とコンパスの使用は有限回にかぎる（無限の操作を許さない)。

(2) 基本作図

①. 正三角形

線分 AB を 1 辺にもつ正三角形を描く

②. 垂直 2 等分線

線分 AB の垂直 2 等分線を描く。

③. 角の 2 等分線

与えられた角の 2 等分線を描く。

④. 垂線を描く

直線 l 外の点 P から直線 l に垂線を下ろす。

直線 l 上の点 P を通る直線 l の垂線を描く。

⑤. 平行線

直線 l 外の点 P を通り直線 l に平行な直線を描く。

⑥. 分点

n を自然数とするとき，線分 AB を n 等分する点を求める。

(3) 円に関する作図

①. 三角形の外接円

②. 三角形の内接円

③. 円の中心

円周のみが与えられたとき，円の中心を作図で求める。

④. 円の接線

円周上の点から円の接線を描く。

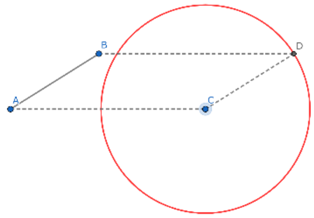
円の外部の点から円に接線を引く。

問題 1

三角形の外接円，内接円の描き方，および，円の中心を作図で求める方法を説明せよ。

(4) 応用作図

コンパスの使い方として，既存の線分の長さを測り取って任意の点を中心としてその半径の円を描くことは想定されていない。けれども，それは可能である。



平行四辺形の対辺の長さが等しいことを利用して，次の定理が得られる。

定理　線分 AB と任意の点 C に対し， C を中心として半径が AB に等しい円を描くことができる。

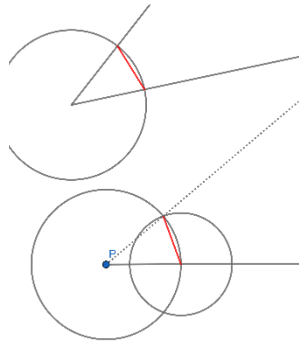
問題 2　右図を参考に，定理を証明せよ。

線分の移動

直線 l と線分 AB があるとき，l 上の点 P に対し，AB=PQ となる点 Q を作図する。

①.　角の移動

与えられた角と等しい角を与えられた半直線を端として描く（右図参照）。



2.　計量

(1) 平均

AB＝a，CD＝b として，a，b の相加平均（算術平均），相乗平均（幾何平均），調和平均を長さとする線分を作図する。

①. 相加平均

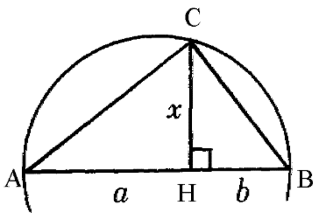
$\dfrac{a+b}{2}$ を相加平均，あるいは，算術平均という。

②. 相乗平均

$\sqrt{ab}$ を相乗平均，あるいは，幾何平均という。

直角三角形 ABC において，直角の頂点 C から対辺に下ろした垂線の足を H とする。

AH＝a，BH＝b とすると，CH＝$\sqrt{ab}$



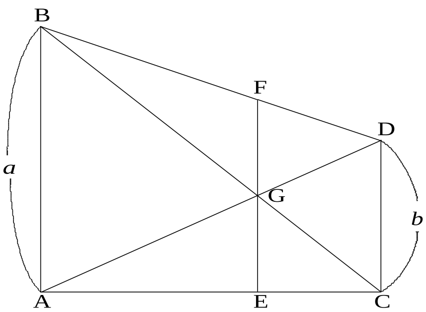
③. 調和平均

a，b の逆数の算術平均の逆数$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$ を

調和平均という。

右図において，AB∥CD∥EF とする。

このとき，EF＝$\dfrac{2ab}{a+b}$　（問題 3）



3.　正多角形

(1) 正五角形

問題 3

(1)　1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE において，対角線 AC の長さを求めよ。

(2)　正五角形を定規とコンパスで作図する方法を考えよ。

4.　ギリシャの 3 大難問

定規とコンパスによる作図で，

（1）与えられた立方体のちょうど 2 倍の体積の立方体を作る。

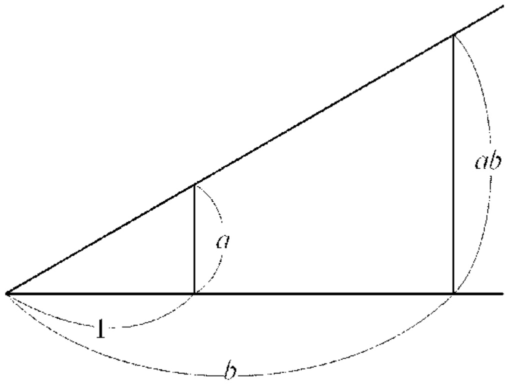
（2）与えられた円と同じ面積の正方形を作図する。

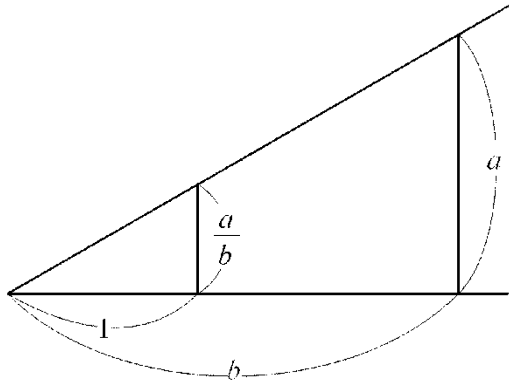
（3）任意に与えられた角を 3 等分する。

5.　定規とコンパスで作図可能な計算

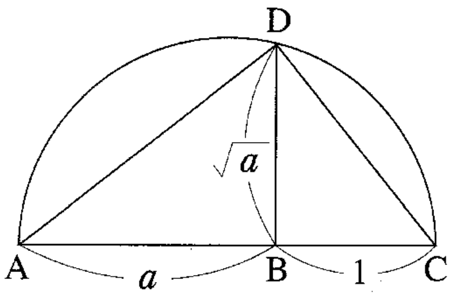
(1) 加減乗除

長さ 1 の線分の存在を仮定すると，与えられた 2 線分の長さに対して，その和差積商の長さを持つ線分は作図できる。





(2) 平方根



(3) 作図可能な数の全体

2 点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線は，$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$

点$(x_0,\ y_0)$を中心とする半径 r の円は，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

直線と直線の交点の座標は，2 直線の係数から四則演算で定まる。

2 点を結ぶ線分の長さは，2 点の座標から四則と平方根の演算で定まる。

円と直線の交点の座標は，円の中心，半径，直線の係数から四則と平方根の演算で定まる。
円と円の交点の座標は，円と直線の交点に帰着させられる。
従って, 作図可能な点の座標は, 加減乗除と平方根の演算を有限回行って得られる数になる。

(4) 作図問題が解決したとき作図可能になる数

（１）体積が 2 の立方体が作図できれば，$\sqrt[3]{2}$ が作図できる。
（２）半径 1 の円と同じ面積の正方形が作図できれば，$\sqrt{\pi}$ が作図できる。
（３）60°の 3 等分(20°)が作図できれば，３次方程式 $8x^3-6x-1=0$ の解が作図できる。
なぜなら，cos20°を x とおくと，3 倍角の公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$
および，$\cos 60°=\frac{1}{2}$ から，$4x^3-3x=\frac{1}{2}$

(補足) 3 倍角の公式は，正弦・余弦の加法定理から証明され，正弦・余弦の加法定理は，三角形に関する余弦定理から証明できる。

(5) $\sqrt[3]{2}$ が作図可能な数でないことの証明のあらすじ

有理数全体の集合を Q とする。

$\sqrt[3]{2}$ が作図可能な数であるとすると，有理数 b_0 を用いて $x+y\sqrt{b_0}$ (x, y は有理数)の形に表せる数の全体の集合 K_1，K_1 に属する数 b_1 を用いて $x+y\sqrt{b_1}$ (x, y は K_1 に属する数)の形に表せる数の全体の集合 K_2，以下，同様に，K_n に属する数 b_n を用いて $x+y\sqrt{b_n}$ (x, y は K_n に属する数)の形に表せる数の全体の集合 K_{n+1} があって $\sqrt[3]{2}\in K_{n+1}$ となっている。

$Q\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_n\subset K_{n+1}$ となっているので，$\sqrt[3]{2}\in K_{n+1}$ となる n のうち，最小であるものを，改めて，n とおく。すなわち，$\sqrt[3]{2}\notin K_n$，$\sqrt[3]{2}\in K_{n+1}$

すると，K_n に属する 3 数 p,q,r があって，$\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$ となっている。ただし，$\sqrt{r}\notin K_n$
$(p+q\sqrt{r})^3=2$　だから，$(p^3+3pq^2r-2)+(3p^2q+q^3r)\sqrt{r}=0$
$\sqrt{r}\notin K_n$ だから，$p^3+3pq^2r-2=0$，$3p^2q+q^3r=0$
したがって，$(p^3+3pq^2r-2)-(3p^2q+q^3r)\sqrt{r}=0$，すなわち，$(p-q\sqrt{r})^3=2$

だから，$\sqrt[3]{2}=p-q\sqrt{r}$ でもあることになって，$q=0$。よって，$\sqrt[3]{2}=p$

これは，$\sqrt[3]{2}\notin K_n$ に反する。

(6) 円積問題の解決

1882 年，リンデマンは π が超越数であることを証明した。
（超越数とは，代数方程式の解となりえない数）