幾何学概論（2）図形の面積・体積

多角形の面積は図形の切り貼りの考え方で定義できる。

しかし，立体の体積にその考え方が通用しないことがデーン(1900)によって証明された。

1.　多角形の面積

2 つの多角形は，一方を有限個の多角形に切り分けて貼り直すと他方と合同にできるとき，**分解合同**であるという。（分割合同ということもある）

分解合同であれば，面積は等しい。逆に，面積が等しい多角形は分解合同である。つまり，多角形の面積は分解合同の概念によって定義されていると考えてよい。

(1) 同値関係

F_1 が F_2 と分解合同であれば，F_2 は F_1 と分解合同である。

F_1 が F_2 と分解合同で，F_2 が F_3 と分解合同であれば，F_1 は F_3 と分解合同である。

(2) 平行四辺形

底辺と高さが等しい平行四辺形は分解合同である。

(3) 三角形

任意の三角形はある長方形と分解合同である。

(4) 長方形

面積が等しい長方形は分解合同である。

(5) 多角形

多角形は三角形に分割することで，長方形に変形できる。

2.　円の面積

曲線で囲まれた図形の面積を分解合同の考え方で定めることはできない。

(1) 上限と下限

実数の集合 S は，「任意の $x \in S$ に対して $x \leqq M$」となる実数 M があるとき，上に有界であるという。また，そのような M のことを上界という。

集合 S が上に有界であるとき，S の上界の最小値が存在する。その値を S の最小上界，または上限という。

「下に有界」，「下界」，「下限」 も同様に定める。

(2) 曲線で囲まれた図形の面積

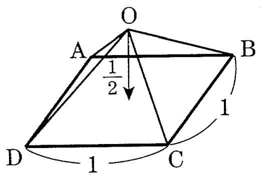
曲線で囲まれた図形 F があるとき，F を内部に含む多角形の面積全体の集合の下限と，F に含まれる多角形の面積全体の集合の上限とが一致するとき，その値を F の面積という。

(3) 円の面積

半径 r の円に内接，外接する正 n 角形の面積はそれぞれ $\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$ ，$\frac{1}{2}nr^2\tan\frac{2\pi}{n}$ で，

$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} n\tan\frac{2\pi}{n} = 2\pi$ だから，半径 r の円の面積は πr^2。

3.　立体の体積



(1) 角錐(かくすい)の体積

1 辺の長さが 1(cm)の立方体（正 6 面体）において外接球の中心を O とする。O を頂点とし，各面を底面とする四角錐が 6 個ある。これらはすべて合同だから体積は等しい。よって，この四角錐の体積は$\frac{1}{6}$ (cm^3)である。

デーンの定理（1900）同じ体積を持つ正四面体と直方体は決して分解合同でない。

デーンの定理は，体積を分解合同の考えで定義することが不可能なことを示している。

そのため，次に示すカヴァリエリの原理を仮定する。

カヴァリエリの原理

2 つの立体を平行な平面で切った切り口の面積が常に等しければ，この 2 つの立体の体積は等しい。

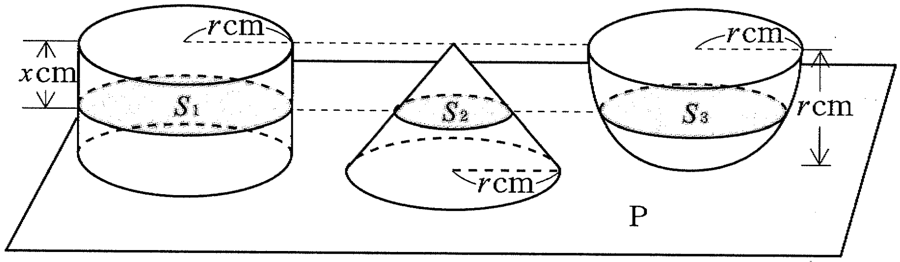
(2) 球の体積

まず，半径が r cm の半球の体積を求める。下の図は，底面の半径と高さが r cm の円柱と円錐，そして，半径が r cm の半球である。これらの 3 立体を円柱の上の面（円錐の頂点，半球の底面）から x cm のところで切った切断面の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると，

$S_1=\pi r^2$，$S_2=\pi x^2$，$S_3=\pi(r^2-x^2)$となり，$S_1=S_2+S_3$がなりたつ。

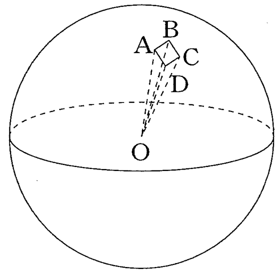
したがって，それぞれの立体の体積を V_1，V_2，V_3 とすると，$V_1=V_2+V_3$。

$V_1=\pi r^3$，$V_2=\frac{1}{3}\pi r^3$ だから，$V_3=\frac{2}{3}\pi r^3$



この結果から，半径が r(cm)の球の体積は$\frac{4}{3}\pi r^3$(cm^3)。

(3) 球の表面積



図のように，球を，中心を頂点とする角錐に分割する。角錐の底面積の和が球の表面積であると考えられるから，

（球の体積）＝（角錐の体積の和）

$= \frac{1}{3}$ ×（球の表面積）×（球の半径）

このことから，半径 r(cm)の球の表面積は $4\pi r^2$(cm^2)