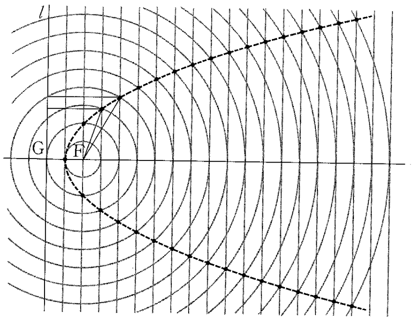
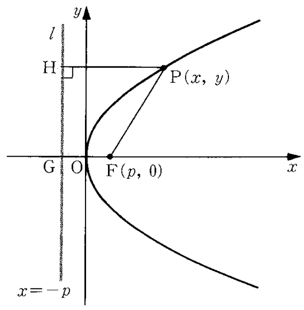
3　2次曲線（円錐曲線）

3.1　放物線

定点 F までの距離と定直線 d までの距離が等しい点の軌跡を**放物線** (parabola) といい，F をその**焦点**，d を**準線**という。F より準線に下ろした垂線を**軸**という。軸と放物線は1点で交わる。この点を**頂点**という。

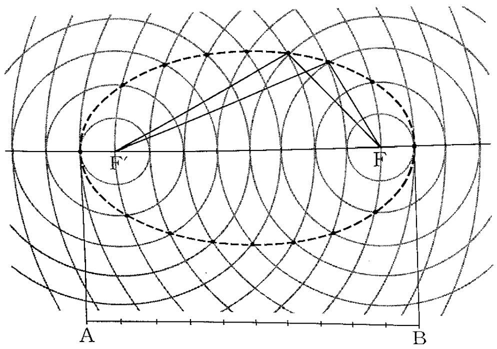




定理 1 焦点が $F(p,0)$，準線が $x=-p$ である放物線の方程式は，$y^2=4px$ である。

3.1.1　楕円

2定点 F，F' からの距離の和が一定 $(2a)$ である点の軌跡を **楕円** (ellipse) といい，F,F' をその焦点という。



2焦点の中点を中心といい，中心を通る弦のうち2焦点 F，F' を通るものを**長軸**，長軸に垂直であるものを **短軸**という（長軸，短軸を延長した直線を長軸，短軸と呼ぶこともある)。

定理 2 長軸を x 軸に，短軸を y 軸にとり，F，F' の座標をそれぞれ $(c,0),(-c,0)$ とする $(a>c\geqq 0)$。このとき，楕円の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\text{ただし},b=\sqrt{a^2-c^2}$$

証明. 2焦点からの距離の和が $2a$ である点を $P(x,y)$ とすると,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{1}$$

これを

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

と変形し，2 乗して簡単にすると，

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \tag{2}$$

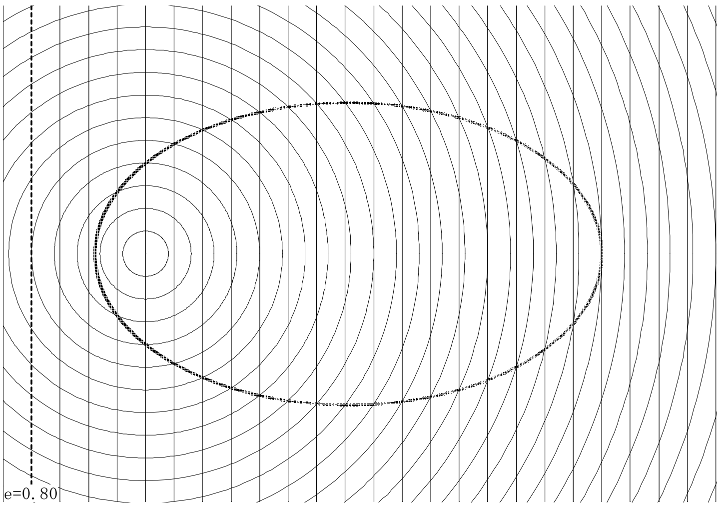
これをさらに 2 乗して整理し，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \tag{3}$$

逆に，点 $P(x,y)$ を (3) を満たす点とすると，$\dfrac{x^2}{a^2} \leqq 1$ だから，$-a \leqq x \leqq a$
$a \geqq x, a > c \geqq 0$ より，$a^2 \geqq cx$，すなわち $a^2 - cx \geqq 0$ だから (2)，
すなわち $FP = a - \dfrac{c}{a}x$ が成立する。
同様に，$F'P = a + \dfrac{c}{a}x$ もいえるので，$FP + F'P = 2a$，すなわち (1) が成立する。 □

注意 3 上の証明から，(1)⇔(2)⇔(3) である。なぜなら，(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1)。

定理 4 $e = \dfrac{c}{a}$ とおくとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ は，直線 $x = \dfrac{a}{e}$ と点 $F(c,0)$ とからの距離の比が e である点の軌跡である。

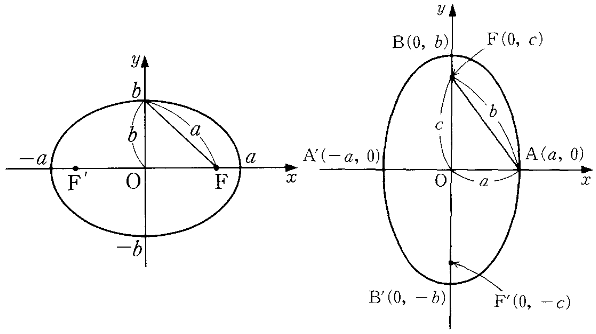


証明. (2) 式より $FP = a - \dfrac{c}{a}x = e(\dfrac{a}{e} - x)$ □

上の定理で e を**離心率**，直線 $x = \dfrac{a}{e}$ を**準線**という。また，$FP = a - ex$ を点 P の焦点距離という。

命題 5 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ が表す図形は，
$a > b$ のとき，
2 点 $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$，$\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ を焦点とする長軸の長さが $2a$ の楕円，
$a = b$ のとき，原点を中心とする半径 a の円，

$a < b$ のとき，
2 点 $\mathrm{F}(0, \sqrt{b^2 - a^2})$，$\mathrm{F}'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ を焦点とする長軸の長さが $2b$ の楕円
である。ただし，a, b は正の数とする。

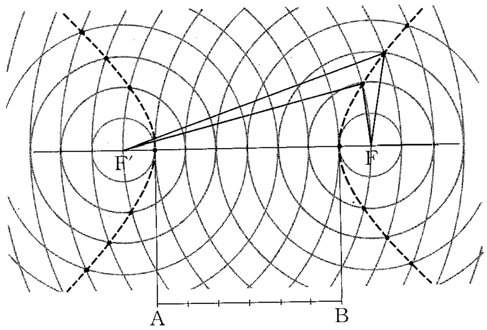


定理 6 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x, y)$ から x 軸に下ろした垂線の足を H，半直線 HP と円 $x^2 + y^2 = a^2$ との交点を P' とし，$\angle HOP' = \theta$ とおけば，

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$$

3.2 双曲線

2 定点 F，F' からの距離の差が一定 $(2a)$ である点の軌跡を**双曲線** (hyperbola) といい，F,F' をその**焦点**という。



焦点 F，F' を通る直線，あるいは，その直線と曲線との交点を結ぶ線分を**主軸**という。

定理 7 主軸を x 軸に，F，F' の座標をそれぞれ $(c, 0), (-c, 0)$ とする $(c > a > 0)$。このとき，$|PF - PF'| = 2a$ を満たす点の軌跡である双曲線の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ただし}, b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

問 8 $|PF - PF'| = 2a$ であるとき，$FP = |a - \dfrac{c}{a}x|$ であることを示せ。

問 9 $FP = |a - \dfrac{c}{a}x|$ であるとき，$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ となることを示せ。

問 10 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ であるとき，$FP=|a-\dfrac{c}{a}x|$，$F'P=|a+\dfrac{c}{a}x|$ となることを示せ。

問 11 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1, c>a>0$ であるとき，$|x|\geqq a$ であることを示せ。

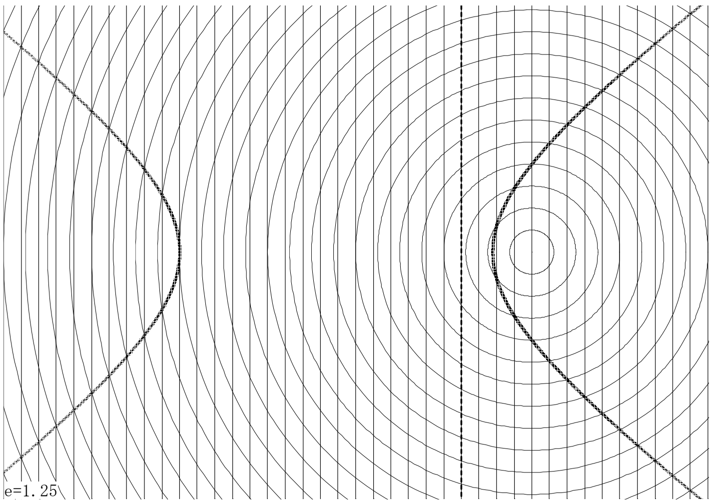
問 12 $x\geqq a\,,\,c>a>0$ であるとき，$a-\dfrac{c}{a}x<0$，すなわち，$|a-\dfrac{c}{a}x|=\dfrac{c}{a}x-a$ であることを示せ。

問 13 $x\leqq -a\,,\,c>a>0$ であるとき，$a+\dfrac{c}{a}x<0$，すなわち，$|a+\dfrac{c}{a}x|=-\dfrac{c}{a}x-a$ であることを示せ。

問 14 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1, c>a>0$ であるとき，$x>0$ ならば $F'P-FP=2a$，$x<0$ ならば $FP-F'P=2a$ であることを示せ。

定理 15 $e=\dfrac{c}{a}$ とおくとき，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ は，直線 $x=\dfrac{a}{e}$ と点 $F(c,0)$ とからの距離の比が e である点の軌跡である。

証明. $FP=|a-\dfrac{c}{a}x|=e|\dfrac{a}{e}-x|$ □



上の定理で e を**離心率**，直線 $x=\dfrac{a}{e}$ を**準線**という。上の双曲線は，直線 $x=-\dfrac{a}{e}$ と点 $F'(-c,0)$ とからの距離の比が e である点の軌跡でもある。

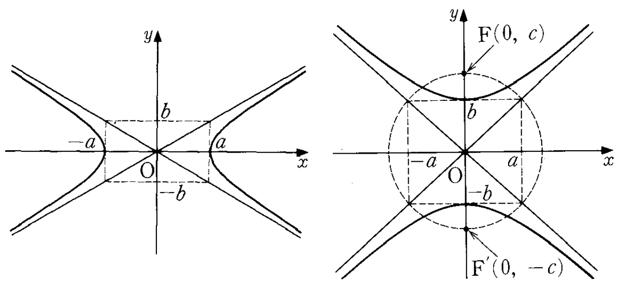
定理 16 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $P(x,y)$ から x 軸に下ろした垂線の足を H，H を通り x 軸に対し P と同じ側にある円 $x^2+y^2=a^2$ の接線を HT（接点を T）とし，$\angle HOT=\theta$ とおけば,

$$x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$$

（Note） $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ 。$\sec\theta$ を θ の正割 (secant) という。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に対し，2 直線 $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$，$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ をその**漸近線**という。曲線上の点 P から P と同じ象限内の漸近線に下ろした垂線を PP' とすると，$|x| \to \infty$ のとき $PP' \to 0$ となる。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に対し，曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ を**共役**な双曲線という。曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ は y 軸を主軸とし，漸近線をはじめの双曲線と共有する双曲線である。



3.3 接線

楕円と 1 点のみを共有する直線をその楕円の**接線**という。

漸近線と平行でなくて双曲線と 1 点のみを共有する直線をその双曲線の接線という。

軸と平行でなくて放物線と 1 点のみを共有する直線をその放物線の接線という。

命題 17 F を焦点とする放物線上の点 P から準線に下ろした垂線の足を P' とするとき，$\angle FPP'$ の 2 等分線は接線である。

証明. $\angle FPP'$ の 2 等分線上に点 P と異なる点 Q をとるとき，$PQF \equiv \triangle PQP'$ だから，$QF = QP'$。Q から準線に下ろした垂線の足を Q' とすると，$\triangle QQ'P$ は直角三角形だから $QP' > QQ'$ なので，$QF > QQ'$。したがって，$\angle FPP'$ の 2 等分線は放物線と 1 点のみを共有する。 □

問 : 接線は $\angle FPP'$ の 2 等分線であるか？　それを証明することができるか？

定理 18 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) におけるその接線の方程式は，$\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ である。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) におけるその接線の方程式は，$\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ である。

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (x_0, y_0) におけるその接線の方程式は，$y_0 y = 2p(x + x_0)$ である。

（Note） 微分係数に基づいて定義された接線と一致する。

3.4 演習問題１

問題 1 焦点が $F(1,1)$,$F'(-1,-1)$ で，$FP+F'P=4$ である点 P の軌跡である楕円の方程式を求めよ。

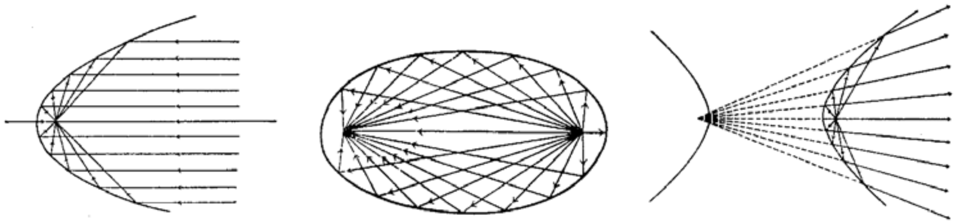
問題 2 焦点が $F(1,1)$,$F'(-1,-1)$ で，$|FP-F'P|=2$ である点 P の軌跡である双曲線の方程式を求めよ。

問題 3 焦点が点 $(2,2)$ で，準線が直線 $x+y=0$ である放物線の方程式を求めよ。［ヒント］点 (x_0,y_0) と直線 $x+y=0$ との距離は $\dfrac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}$

問題 4 2 次方程式の判別式を利用して，定理 18 を証明せよ。

問題 5 上の結果が微分法により定義される接線と一致することを確かめよ。

問題 6 焦点が F である放物線上の点 P における接線が軸と点 T で交わるとき，$FP=FT$ であることを示せ。



問題 7 三角形 ABC において次の (1)，(2) を証明せよ。
(1) 辺 BC 上に点 P があって $AB:AC=BP:CP$ であるとき，AP は頂角 A の 2 等分線である。
(2) 辺 BC の延長上に点 Q があって，$AB:AC=BQ:QC$ であるとき，AQ は頂角 A の外角の 2 等分線である。
［ヒント］　初等幾何

問題 8 点 $F(c,0)$，$F'(-c,0)$ を焦点とする楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $P(x_0,y_0)$ における接線と長軸 (x 軸) との交点を T とするとき，$FP:F'P=FT:F'T$ であることを証明せよ。
［ヒント］$FP=a-\frac{c}{a}x_0$，$F'P=a+\frac{c}{a}x_0$

問題 9 2 点 F，F' を焦点とする双曲線上の点 P における接線が点 T で主軸と交わるとき，$FP:F'P=FT:F'T$ であることを証明せよ。

問題 10 2 点 F,F' を焦点とする楕円上の点 P における接線上に P を挟む 2 点 T,T' をとるとき $\angle FPT'=\angle F'PT$ であることを証明せよ。

問題 11 2 点 F，F' を焦点とする双曲線上の点 P における接線は $\angle FPF'$ の 2 等分線であることを証明せよ。

問題 12 m を定数とする。放物線 $y^2 = 4px$ と傾きが m の直線との交点の中点の軌跡を求めよ。

問題 13 放物線上の動点 P における法線が軸と交わる点を S，P より軸に下ろした垂線の足を M とするとき，MS の長さは一定であることを示せ。（法線とは，接線に垂直な直線のことである。）

問題 14 放物線の軸と平行な直線 l がある。l が放物線と交わる点における接線と同じ傾きをもつ直線が放物線と 2 点 P,Q で交わるとき，線分 PQ は l によって 2 等分されることを示せ。

問題 15 P，Q を放物線上の異なる 2 点とし，P,Q での接線の交点を R とする。P,Q を通り軸と平行な直線が準線と交わる点をそれぞれ A,B とし，放物線の焦点を F とするとき，$RA = RB = RF$ であることを示せ。

問題 16 放物線の焦点を通る直線が放物線と交わる 2 点を結ぶ線分を直径とする円は，準線に接することを示せ。

問題 17 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 P における接線が y 軸と点 N において交わるとき，N と焦点を結ぶ直線は接線と垂直であることを示せ。

問題 18 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 P における接線に焦点 $F(p, 0)$ から下ろした垂線と，P を通り x 軸に平行な直線との交点の軌跡を求めよ。

問題 19 P，Q を放物線上の異なる 2 点とし，P,Q での接線の交点を R とし，R を通り軸に平行な直線を l，l と PQ の交点を S，l と放物線との交点を T とする。このとき，S は PQ の中点であり，T における放物線の接線は PQ に平行であって，T は RS の中点であることを証明せよ。

問題 20 放物線の頂点を通り，互いに垂直に引いた 2 直線が曲線と再び交わる 2 点を結ぶ直線は，軸の上の定点を通ることを証明せよ。

問題 21 x 軸上に一端 A を，y 軸上に他端 B を置きながら動く長さ 5 の線分 AB を $3:2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

問題 22 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と傾きが m である直線が交わるとき，その中点の軌跡を求めよ。

問題 23 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の焦点のひとつを F とする。F とこの楕円上の任意の点 P とを結ぶ線分 FP の中点 Q の軌跡を求めよ。

問題 24 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の焦点のひとつを F とする。F からこの楕円上の動点 P における接線に下ろした垂線の足の軌跡は長軸を直径とする円であることを示せ。

問題 25 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点のひとつを F とする。F から曲線上の動点 P における接線に下ろした垂線の足の軌跡を求めよ。

問題 26 原点を O とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 T における接線へ焦点 $F(\sqrt{a^2-b^2},0)$ から下ろした垂線と，直線 OT との交点の軌跡を求めよ。ただし，$a>b>0$ とする。

問題 27 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の動点 P から x 軸に下ろした垂線の足を M とし，P における接線が x 軸と交わる点を T とすると，$OM\cdot OT$ は一定であることを示せ。

問題 28 円 $x^2+y^2=16$ に内接し，点 $(2,0)$ を通る円の中心の軌跡を求めよ。

問題 29 円 $x^2+y^2=9$ に内接し，円 $(x-1)^2+y^2=1$ に外接する円の中心の軌跡を求めよ。

問題 30 円 $(x+2)^2+y^2=4$ に接し，点 $(2,0)$ を通る円の中心の軌跡を求めよ。

問題 31 双曲線上の任意の点 P から接線を引き，２つの漸近線と交わる点を Q，R とすれば，$PQ=PR$ であることを証明せよ。

問題 32 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 P における接線が漸近線と交わる点を Q，R とすれば，$\triangle OQR$ の面積は点 P の位置にかかわらず一定であることを示せ。［ヒント］OQ，OR を求め，その積を計算する。

問題 33 円 $x^2+y^2=1$ と x 軸との交点を A，A' とする。PP' を y 軸に平行な任意の弦とするとき，2 直線 AP，$A'P'$ の交点の軌跡を求めよ。

問題 34 2 直線 $y=mx$，$y=-mx$ に至る距離の積が一定 (k とする) である点の軌跡は，この 2 直線を漸近線とする双曲線であることを示せ。

3.5 極座標

3.5.1 直交座標と極座標

平面上の定点 O を**極**と呼び，O を始点とする半直線 OX を固定し，**始線**と呼ぶ。平面上の点 P に対して，線分 OP の長さを**動径**，半直線 OP が OX となす書くを**偏角**という。平面上で，動径が r, 偏角が θ である点を (r,θ) で表し，(r,θ) をその点の**極座標**という。

平面上の点 P の直交座標が (x,y), 極座標が (r,θ) であるとき，

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

の関係がある。

3.5.2 極方程式

曲線上の任意の点の極座標を (r,θ) とするときの r,θ の関係式を曲線の**極方程式**という。極方程式では，$r<0$ のとき，(r,θ) は（$-r,\theta+\pi$）の点を表すものとみなす。

例 19 直線の極方程式　極 O から直線 l に下ろした垂線の足の極座標が $\mathrm{H}(p,\alpha)$ であるとき，直線 l 上の任意の点の極座標を $\mathrm{P}(r,\theta)$ とすると，$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{HOP}=\mathrm{OH}$ であり，$\angle\mathrm{HOP}=\theta-\alpha$, $\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{OH}=p$ であるから，

$$r\cos(\theta-\alpha)=p$$

直交座標 x,y に関する方程式は，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を代入すれば極方程式に直すことができる。

問題 35 次の直線の方程式を極方程式に直せ。
(1)　$x+y=4$　　(2)　$2x-y=3$　　(3)　$x=2$　　(4)　$y=3$

問題 36 直交座標に関する方程式 $x^2+y^2-2y=0$ を極方程式に直せ。

極方程式は，$r=\sqrt{x^2+y^2}, \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を代入して r,θ を消去すれば直交座標に関する方程式に直せる。

問題 37 極方程式 $r\cos(\theta-\frac{\pi}{6})=2$ を直交座標に関する方程式に直せ。

問題 38 極方程式 $r=2\cos\theta$ が表す図形は何か。

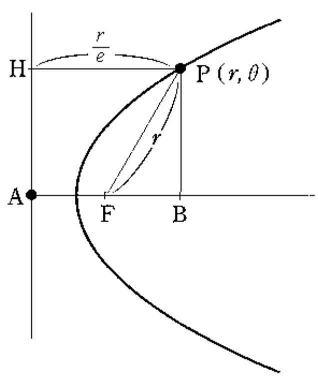
問題 39 極方程式 $r^2-4r\cos\theta-2r\sin\theta+4=0$ が表す図形は何か。

3.5.3 円錐曲線の極方程式

楕円，放物線，双曲線を総称して円錐曲線という。

命題 20 焦点が極，準線の極方程式が $r\cos\theta=-c$ $(c>0)$，離心率 e の円錐曲線の極方程式は，$r=\frac{ce}{1-e\cos\theta}$ である。

証明. 曲線上の点 P から準線に下ろした垂線の足を H, 焦点を F とすると，
$e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ より，$\mathrm{PH}=\frac{\mathrm{PF}}{e}$。よって，$\frac{r}{e}=c+r\cos\theta$



□

問題 40 曲線 $r = \frac{2}{2-\cos\theta}$ の概形を描け。