5　ベクトルと内積

5.1　ベクトル

5.1.1　ベクトルの和とスカラー倍

3 数 a_1, a_2, a_3 を順序をつけて並べたものを 3 次元**ベクトル**といい，(a_1, a_2, a_3) のように書いて，a_1 を第 1 成分，a_2 を第 2 成分，a_3 を第 3 成分という。2 つのベクトルは対応する成分が等しいとき等しい。

普通の数を**スカラー**という。2 つのベクトルの**和**と，ベクトルの**スカラー倍**の演算を次のように定める。

定義 1 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対し，$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

命題 2 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を同じ次元のベクトルとし，k, l を数とすると，

（交換法則）	$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
（結合法則）	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
（ベクトルに関する分配の法則）	$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$
（スカラーに関する分配の法則）	$(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
（スカラーに関する結合法則）	$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a}$

問題 1 上の命題を確かめよ（証明せよ）。

$\boldsymbol{a}$ を任意のベクトルとするとき，$k \neq 0$ ならば，$k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ はただひとつ存在し，$\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{k}\boldsymbol{a}$ である。このベクトルを $\dfrac{\boldsymbol{a}}{k}$ で表す。

5.1.2　零ベクトルと逆ベクトル

各成分がすべて 0 であるベクトルを**零ベクトル**といい，$\boldsymbol{0}$ で表す。任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ である。

$(-1)\boldsymbol{a}$ を $-\boldsymbol{a}$ で表し，$\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**という。逆ベクトルについて，$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ が成立する。

$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ で表し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**差**という。$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 2 つのベクトルとするとき，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ はただひとつ存在し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ である。

5.2　幾何ベクトル

5.2.1　座標ベクトル

点 P の座標が (a_1, a_2, a_3) であるとき，座標を成分とするベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を点 P の座標ベクトルという。

以後，座標と座標ベクトルを区別せずに用いる。

たとえば，点 P の座標ベクトルが $\boldsymbol{a}$ であることを $\mathrm{P}(\boldsymbol{a})$ で表す。

5.2.2 幾何ベクトル

定義 3 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3), \mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

問題 2 次の命題が成立することを確かめよ。

命題 4
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$$

5.2.3 位置ベクトル

C を定点とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を (C に対する)P の**位置ベクトル**という。
原点 O に対する点 P の位置ベクトルは，P の座標ベクトルと一致する。
2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ である。
特に，2 点 A, B の位置ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ のとき，A, B は一致する。

5.2.4 分点の位置ベクトルと直線のベクトル方程式

線分 AB を $m : n$ の比に分ける点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ だから，
A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{p} = \dfrac{n}{m+n}\boldsymbol{a} + \dfrac{m}{m+n}\boldsymbol{b}$ である。
(Note) 外分点の場合は，m, n のうちの一方を負数にする。

直線 AB 上の任意の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 λ が存在するから，
A, B, P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{p} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ である。
逆に，3 点 A, B, P の位置ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$ について，$\boldsymbol{p} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ となる λ が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ だから，P は直線 AB 上の点である。

5.2.5 1 次独立なベクトル

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は，$x = y = 0$ の他に $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ となる実数 x, y が存在しないとき，**一次独立**であるという。
相異なる 3 点 A, B, C が同一直線上にないとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立である。なぜなら，少なくとも一方は 0 でない x, y に対し $x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ が成立するとすると，たとえば，$x \neq 0$ であれば $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となって，3 点が一直線上にないことに反するからである。
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立であれば，$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$ となるのは $x = x', y = y'$ の場合に限る。

例題 5 △ ABC の各頂点をそれぞれ $\mathrm{A}(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{B}(\boldsymbol{b})$, $\mathrm{C}(\boldsymbol{c})$ とする。辺 AB，AC の中点を，それぞれ，M，L，中線 BL，CM の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ。

解. BP:PL=$s : (1-s)$，CP:PM=$t : (1-t)$ とすると，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AL}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
3 点 A,B,C は一直線上にないから，$1-s = \dfrac{1}{2}t, \dfrac{1}{2}s = 1-t$
よって，$s = \frac{2}{3}$，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ なので
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = a + \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ □

三角形の 3 中線の交点を重心という。三角形の各頂点と重心の位置ベクトルを順に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{g}$ とすると，$\boldsymbol{g} = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ である。

問題 3 △ ABC の辺 AB を 3:2 の比に内分する点を D，辺 AC の中点を E とする。BE と CD の交点を P とするとき，CP : PD を求めよ。

問題 4 平面上に 2 点 A(2,1)，B(1,3) がある。次に示す点 P に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 λ, μ を求めよ。

(1) P $(8, 9)$ (2) P$(-4, 5)$

命題 6 平面上に 3 点 O,A,B があって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とするとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立であれば，平面上の任意の点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 λ, μ がただ一通りに定まる。

5.2.6 平行なベクトル

傾きが等しい 2 直線は一致するかまたは平行であり，逆も成り立つから，次のことがいえる。

命題 7 2 直線 AB，CD が一致するかまたは平行 ⇔ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となる 0 でない実数 k がある。

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ となる 0 でない実数 k が存在するとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**平行**であるといい，$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ で表す。
3 点 A,B,C が同一直線上にないとき，四角形 ABCD が平行四辺形になるための必要十分条件は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ である。

問題 5 平行四辺形 ABCD の辺 CD 上に点 P を CP:PD=1:2 となるようにとり，対角線 CA 上に点 Q を CQ:QA=1:3 となるようにとれば，3 点 P,Q,B は 1 直線上にあることを証明せよ。

5.3 ベクトルの大きさと内積

5.3.1 ベクトルの大きさ

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対して，その大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$ で定める。
$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ の大きさは 1 であって，$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ が成り立つ。また，任意のスカラー

k に対し，$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$ である。

5.3.2 ベクトルの内積（スカラー積）

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対し，その内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を次により定める。

定義 8 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

問題 6 次の命題が成立することを確かめよ。

命題 9 (1) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$$
(2) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$
(3) $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \quad , \ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$
(4) $$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

次の公式も成立する。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{b}|^2$$
$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \pm 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 \qquad \text{（複号同順）}$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$$

命題 10 （シュワルツの不等式） $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leqq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leqq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

問題 7 上の命題が成り立つことを確かめよ。
[ヒント] $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と置き，$(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \geqq 0$ を示す。

5.3.3 ベクトルのなす角

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し,$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 2 点 A,B をとるとき∠ AOB を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角という。
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行でないとき,
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，余弦定理より $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$
内積の計算公式から $\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ なので，$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$
この結果は，$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ の場合にも正しいから次の命題が成立する。

命題 11 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると， $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

命題 12 (ベクトルの垂直条件) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がいずれも零ベクトルでないとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ のなす角} = 90^\circ$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ のとき $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は垂直であるといい，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ で表す。零ベクトルは任意のベクトルと垂直と考える。

問題 8 4 点 O,A,B,C があって，OA⊥BC，OB⊥CA ならば OC⊥AB であることを示せ。

前問は，三角形の 3 垂線が 1 点 (垂心) で交わることの証明になっている。

問題 9 △ ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 H をとると，H は△ ABC の垂心であることを証明せよ。

問題 10 △ ABC の外心，垂心，重心は 1 直線上にあることを証明せよ。[ヒント] 前問の結果を利用。

問題 11 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を零ベクトルでない定ベクトルとする。t を実数値をとる変数とするとき，$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ が最小となるような t の値 t_0 を，$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて表せ。また，このとき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}+t_0\boldsymbol{b}$ は垂直であることを示せ。
[ヒント]$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2$ を最小にする t を求める。

問題 12 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$ を利用して，△ ABC の辺 BC の中点を M とするとき，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ であることを示せ。

問題 13 △ ABC の辺 BC 上に点 P があって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ であるとき，点 P はどんな点か。
[ヒント]$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\boldsymbol{c}$ とおくと $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|^2=2|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$。$\boldsymbol{b}=m\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\boldsymbol{c}=n\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とおいて，$m+n=0$ の場合と，$m+n\neq 0$ の場合とに分ける。

問題 14 動点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ で表すとき，中心の位置ベクトルが $\boldsymbol{c}$ で半径が r である円（または球面）のベクトル方程式は，$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}|^2=r^2$ である。2 点 A,B の位置ベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とするとき，内積の計算により，AB を直径とする円（または球面）のベクトル方程式は，$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})=0$ であることを示せ。
[ヒント] 中心の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$, 半径は $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right|$。

問題 15 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$ とするとき，△ OAB の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ で与えられることを示せ。