6　複素数平面

6.1　複素数

6.1.1　複素数の演算

2 次元ベクトル $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ に対し，その積 $\alpha\beta$ を

$$\alpha\beta = (a_1b_1 - a_2b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1)$$

で定める。和はベクトルとしての和の定義を踏襲する。この和と積の演算のもとで 2 次元ベクトルを**複素数**という。

複素数の計算について次の法則が成立する。ただし，$\mathbf{0} = (0, 0)$，$\mathbf{1} = (1, 0)$。

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,　　$\alpha\beta = \beta\alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

(3) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,　　$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(4) $\alpha + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \alpha = \alpha$,　　$\alpha\mathbf{1} = \mathbf{1}\alpha = \alpha$

これらの公式は，成分で表して確かめることができる。

例 1 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

$\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, $\gamma = (c_1, c_2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\gamma &= (a_1b_1 - a_2b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1)(c_1, c_2)\\
&= ((a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2,\ (a_1b_1 - a_2b_2)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)c_1)\\
&= (a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1,\ a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_2b_2c_2)\\
\alpha(\beta\gamma) &= (a_1, a_2)(b_1c_1 - b_2c_2,\ b_1c_2 + b_2c_1)\\
&= (a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_1c_2 + b_2c_1),\ a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2))\\
&= (a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1,\ a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_2b_2c_2)
\end{aligned}$$

$\therefore\ (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

練習 2 $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ を確かめよ。

6.1.2　スカラー倍と複素数の積

$(k, 0)(x, y) = (kx, ky)$ であり，$k(x, y) = (kx, ky)$ であるので，$(k, 0)(x, y) = k(x, y)$。

すなわち，複素数 $(k, 0)$ をかけるのと，ベクトルのスカラー倍の意味で k をかけるのは同じ効果を持つ。

そこで，複素数 $(k, 0)$ を実数 k と同一視する。

6.1.3　虚数単位

$i = (0, 1)$ を**虚数単位**という。

$i^2 = -1$　である。なぜなら，$i^2 = ii = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) = (-1, 0) = -1$

$(x,0)$ を実数と同一視して x と書く約束を用いると，
複素数 (x,y) は，虚数単位 i を用いて $(x,y)=(x,0)+y(0,1)=x+yi$ と書ける。

6.1.4 複素数の絶対値

複素数 $\alpha=(a_1,a_2)$ に対し，$|\alpha|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$ を α の**絶対値**という。
$|\alpha|$ はベクトルの大きさである。
絶対値の計算法則
$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$
なぜなら，$\alpha=(x_1,y_1)$，$\beta=(x_2,y_2)$ とおくと，
$\alpha\beta=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ なので，
$|\alpha\beta|^2=(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2={x_1}^2{x_2}^2+{y_1}^2{y_2}^2+{x_1}^2{y_2}^2+{x_2}^2{y_1}^2$
$|\alpha|^2|\beta|^2=({x_1}^2+{y_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2)={x_1}^2{x_2}^2+{x_1}^2{y_2}^2+{x_2}^2{y_1}^2+{y_1}^2{y_2}^2$
$\therefore|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

6.1.5 共役複素数

複素数 $\alpha=(a_1,a_2)$ に対し，$(a_1,-a_2)$ を α の **共役(きょうやく) 複素数**といい，$\overline{\alpha}$ で表す。
$z=x+yi$ とかくとき，$\overline{z}=x-yi$。
複素数を平面上の点とみるとき, 共役複素数は x 軸に関して対称な点を表す。
共役複素数について，次の計算公式が成立する。
$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2, \overline{\overline{\alpha}}=\alpha,\ \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\ \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}, \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$
k が実数のとき $\overline{k}=k$ であり，その逆も成立する。すなわち，$\overline{z}=z\Leftrightarrow z$ は実数。

練習 3 $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2, \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$ を確かめよ。

6.1.6 複素数の除算 (割り算)

有理数，実数の世界では除算ができる。複素数の世界でも除算が可能なことを示す。
$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2$ なので $\beta\overline{\beta}$ は実数。だから，$\beta\neq 0$ のとき，$\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}$ は実数。
$\beta\left(\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\overline{\beta}\right)=1$ となるから，$\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\overline{\beta}$ は β の乗法に関する逆元 (逆数)。
これを用いて，$\beta\neq 0$ のとき $\alpha\div\beta$ の除算ができる。
$\alpha\div\beta$ は $\beta z=\alpha$ となる複素数 z を表す。
$\beta z=\alpha$ の両辺に $\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\overline{\beta}$ をかけて $z=\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\alpha\overline{\beta}$
すなわち，$\alpha\div\beta=\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\alpha\overline{\beta}$
以後，$\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\alpha\overline{\beta}$ を $\dfrac{\alpha}{\beta}$ で表す。
$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{\beta\overline{\beta}}\alpha\overline{\beta}$ は，複素数の計算において，分母，分子に分母の共役複素数をかけると分母が実数化されることを意味している。

0 でない複素数に乗法に関する逆元 (逆数) が存在することから，次の関係が成り立つ。
$\alpha\ \beta\ = 0 \Leftrightarrow \alpha\ = 0$ または $\beta\ = 0$
なぜなら，$\alpha\ \beta\ = 0$ のとき，$\alpha\ \neq 0$ なら両辺に $\dfrac{1}{\alpha}$ をかけて $\beta\ = 0$ となるから。
また，共役複素数について次の公式が成立することもわかる。
$\overline{(\dfrac{\alpha}{\beta})} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

6.1.7 複素数の極形式

x, y を少なくとも一方が 0 でない実数とするとき，

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta,\ y = \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta$$

となる角 θ が存在し，2π のちがいを無視すれば一意的に定まる。

したがって, 複素数 z に対し，$|z| \neq 0$ のとき，$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ となる θ が 2π の違いを無視して一意的に定まる。この角 θ を z の**偏角**といって，$\arg z$ で表す[1]。また，$z = 0$ のとき，$\arg z$ は任意の角を表すものとする。

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ （ただし，$r \geqq 0$）を**極形式**という。
極形式で表された複素数の積は次の公式で行うことができる。
$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき，
$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$。
なぜなら，

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &\quad = \cos\ \theta\ _1\cos\ \theta\ _2 - \sin\ \theta\ _1\sin\ \theta\ _2 + i(\sin\ \theta\ _1\cos\ \theta\ _2 + \sin\ \theta\ _1\cos\ \theta\ _2)\\ &\quad = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

6.1.8 偏角と絶対値

極形式の計算公式から，次のことがわかる。
複素数 z_1，z_2 に対し，
$|z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$
$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$
注意. 偏角は，2π の差を無視して考える。たとえば，$\frac{3\ \pi}{2}$ と $-\frac{\pi}{2}$ を同じ角とみなす。

6.1.9 極形式の計算公式（除算）

極形式で表された複素数の商は次の公式で行うことができる。
$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき，
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$。
特に，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$
証明. $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{|z_2|^2}\overline{z_2}$ なので，$\arg\dfrac{1}{z_2} = \arg\overline{z_2} = -\arg z_2$

[1] arg は argument の略

$$\therefore\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1\frac{1}{z_2}=\arg z_1+\arg\frac{1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2\quad\square$$

6.1.10 平行条件と垂直条件

2つの0でない複素数 α,β がベクトルとして平行である条件は，$\alpha=k\ \beta$ となる実数 k が存在すること。そのとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は実数だから $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$。逆に $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ のとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}=k$ とおけば $\alpha=k\ \beta$ となるから $\alpha//\beta$。

命題 4 2つの0でない複素数 α,β について，　$\alpha//\beta\Leftrightarrow\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta$

2点 $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ をベクトルとみなすと内積 $\alpha\cdot\ \beta\ =a_1b_1+a_2b_2$ が定義される。

このとき，$\alpha\cdot\ \beta\ =\frac{1}{2}(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)$ である。なぜなら，

$\alpha\ \overline{\beta}\ =(a_1+a_2i)(b_1-b_2i)=a_1b_1+a_2b_2-(a_1b_2-a_2b_1)i$

$\overline{\alpha}\ \beta\ =(a_1-a_2i)(b_1+b_2i)=a_1b_1+a_2b_2+(a_1b_2-a_2b_1)i$

$\therefore\ \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=2(a_1b_1+a_2b_2)=2\alpha\cdot\ \beta$

この等式を利用すると，複素数の垂直条件が以下のように求まる。

$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\alpha\cdot\ \beta\ =0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)=0\Leftrightarrow a\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$

命題 5 $\qquad\alpha\perp\beta\Leftrightarrow a\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$

注意　通常，複素数に内積を定義することをしない。その場合，・は複素数の積を表す記号として用いられるかもしれない。

6.1.11 複素数のなす角

ベクトルがなす角に向きを考えないけれども，複素数では角の向きを考える。

角の正の向きは，三角関数と同様，半時計まわり。半直線 OA を原点 O のまわりに θ 回転させると半直線 OB と重なるとき，半直線 OA に対し半直線 OB がなす角は θ であるといい，この角を $\angle AOB$ で表す。

複素数 α，β に対し，$\overrightarrow{OA}=\ \alpha$,$\overrightarrow{OB}=\ \beta$ となる2点 A,B をとるとき，$\angle AOB$ を α に対し β がなす角という。

偏角は $2\ \pi$ の違いを無視して考える約束のもとで $\angle AOB=\arg\ \beta\ -\arg\ \alpha$ となるので，偏角の計算公式から，

命題 6 β が α に対しなす角 $=\arg\dfrac{\beta}{\alpha}$

6.1.12 虚数と純虚数

複素数 $\alpha=(a_1,a_2)$ に対し，a_1 を実部，a_2 を虚部といい，それぞれ，$\mathrm{Re}(\alpha)$，$\mathrm{Im}(\alpha)$ で表す。

$\mathrm{Re}(\alpha)=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \mathrm{Im}(\alpha)=\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$
a, b を実数とするとき，bi を**純虚数**といい，$b \neq 0$ であれば $a+bi$ を**虚数**という。0 は虚数ではないが，純虚数である。$2i$，$3i$ などは虚数であり純虚数でもある。$1+2i$ は虚数であるが，純虚数ではない。

実数には正の数，負の数の別があるが，複素数に正負の別はない。

複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\overline{\alpha}=\alpha$ であり，α が純虚数であるための必要十分条件は $\overline{\alpha}=-\alpha$ である。

6.2 図形の方程式

P が複素数 z の点であるとき，$P(z)$ と書く。

6.2.1 円の方程式

点 α を中心とする半径 r の円の方程式は $|z-\alpha|=r$ である。
これを変形すると，

$$(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=r^2$$
$$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+|\alpha|^2=r^2$$

例題 7 2 点 $A(\alpha), B(\beta)$ に対し，$AP \perp BP$ となる点 $P(z)$ の軌跡を求めよ。

解.

$$(z-\alpha)\overline{(z-\beta)}+\overline{(z-\alpha)}(z-\beta)=0$$
$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\beta})+(\overline{z}-\overline{\alpha})(z-\beta)=0$$
$$2z\overline{z}-(\alpha+\beta)\overline{z}-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})z+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$$
$$z\overline{z}-\frac{\alpha+\beta}{2}\overline{z}-\overline{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}z+\frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{2}=0$$
$$\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\alpha+\beta}{2}\overline{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}-\frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{2}$$
$$\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^2$$

これは，点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を中心とする半径 $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|$ の円，すなわち，2 点 α, β を直径の両端とする円である。 □

問題 1 3 点 $3+2i$，$3i$，$2-i$ を通る円の方程式を求めよ。
[ヒント] 円の方程式 $z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+|\alpha|^2=r^2$ に 3 点の座標を代入する。

問題 2 複素数平面上の 2 点 1，i に至る距離の比が $2:1$ である点 z の軌跡を求めよ。
[ヒント]$|z-1|:|z-i|=2:1$ を変形して円の方程式を導く。

6.2.2 図形の方程式

$z = x + iy$ (x, y は実数) であるとき，$x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$，$y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ であるので，x, y で書かれた方程式にこれらを代入すれば複素数の変数 z で書かれた方程式が得られる。

例 8 直線の方程式 $2x + 3y = 4$ を複素数変数の方程式に直せ。

解. $2\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right) + 3\left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right) = 4$ より，$(2-3i)z + (2+3i)\overline{z} = 8$ □

逆に，$z = x + iy$，$\overline{z} = x - iy$ を代入すれば直交座標 (x, y) に関する方程式に直せる。

例 9 $(2+i)z + (-2+i)\overline{z} = 2i$ が表す図形は何か。

解. $(2+i)(x+iy) + (-2+i)(x-iy) = 2i$ より $x + 2y = 1$

直線 $x + 2y = 1$ を表す。 □

問題 3 次の方程式が表す図形は何か。
(1) $z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + 8z + 8\overline{z} = 0$
(2) $(1+2i)z + (-1+2i)\overline{z} + 2 = 0$
[ヒント]　変な答もある。

6.2.3 直線の方程式

α を 0 でない複素数とする。

点 z_0 を通りベクトル α に垂直な直線の方程式は，$z - z_0 \perp \alpha$ より

$$\alpha\overline{(z - z_0)} + \overline{\alpha}(z - z_0) = 0$$

すなわち，
$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = \alpha\overline{z_0} + \overline{\alpha}z_0$$

ここで，$\alpha\overline{z_0} + \overline{\alpha}z_0 = \alpha\overline{z_0} + \overline{\alpha\overline{z_0}}$ であるから，この方程式の右辺は実数である。

したがって，直線の方程式の一般形は，

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = c \quad (c \text{ は実数})$$

である。これは，$ax + by + c = 0$ に $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ を代入して整理すると，

$$\overline{(a+bi)}z + (a+bi)\overline{z} + 2c = 0$$

となることからも分かる。

また，点 z_0 を通り α に平行な直線の方程式は，$(z - z_0) /\!/ \alpha$ より

$$\overline{\alpha}(z - z_0) = \alpha\overline{(z - z_0)}$$

すなわち，
$$\overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} = \overline{\alpha}z_0 - \alpha\overline{z_0}$$
である。

ここで，$\overline{\alpha}z_0 - \alpha\overline{z_0} = \overline{\alpha}z_0 - \overline{\overline{\alpha}z_0}$ は純虚数であるから，α に平行な直線の方程式は

$$\overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} = ci \qquad (c \text{ は実数})$$

の形になる。

問題 4 2 点 z_1, z_2 を通る直線の方程式は，$\overline{(z_2 - z_1)}z - (z_2 - z_1)\overline{z} = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$ である。
[ヒント] $z - z_1 /\!/ z_2 - z_1$

問題 5 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。
(1) $1-i$ と $2+3i$
(2) $1+2i$ と $2+2i$
(3) $3-i$ と $3+i$

問題 6 次の直線の方程式を求めよ。
(1)　実軸の正の向きとなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ で点 $2+3i$ を通る
(2) $(2-3i)z+(2+3i)\overline{z}=8$ と平行で点 $1+i$ を通る　[ヒント] 法線ベクトルが共通

問題 7 2 直線 $(3-2i)z-(3+2i)\overline{z}=-4i,\ (i+1)z+(i-1)\overline{z}=2i$ の交点を求めよ。
[ヒント] $z,\overline{z}$ に関する連立方程式を解く。

問題 8 2 点 $4,3i$ から等距離にある点の軌跡を求めよ。
[ヒント]$|z-4|=|z-3i|$ を変形して直線の方程式を導く。$|z|^2=z\overline{z}$ に注意。

問題 9 直線 $(2-3i)z+(2+3i)\overline{z}=8$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ 回転して得られる直線の方程式を求めよ。
[ヒント]　求める直線上の点を z とすると，z を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点は元の直線上にある。

6.2.4　三角形の外心座標

命題 10 点 $A(\alpha)$ が単位円上にあるとき，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

証明. $|\ \alpha\ |^2=1$ より $\alpha\ \overline{\alpha}\ =1$ □

例題 11 3 点 $A(\alpha),B(\beta),C(\gamma)$ が単位円上にあるとき，$\triangle ABC$ の垂心は $\alpha+\beta+\gamma$ であることを示せ。

解. A から BC に下ろした垂線の方程式は,

$$(\gamma-\beta)\overline{z}+\overline{(\gamma-\beta)}z=(\gamma-\beta)\overline{\alpha}+\overline{(\gamma-\beta)}\alpha$$

$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta},\ \overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$ を代入して,

$$(\gamma-\beta)\overline{z}+(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta})z=(\gamma-\beta)\frac{1}{\alpha}+(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta})\alpha$$

$$(\gamma-\beta)\overline{z}+\frac{\beta\ -\ \gamma}{\beta\gamma}z=(\gamma-\beta)\frac{1}{\alpha}+\frac{\beta\ -\ \gamma}{\beta\gamma}\alpha$$

$$\overline{z}-\frac{1}{\beta\gamma}z=\frac{\beta\gamma-\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$$

同様に，B から CA に下ろした垂線の方程式は,

$$\overline{z}-\frac{1}{\gamma\alpha}z=\frac{\gamma\alpha-\beta^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$\overline{z}$ を消去して

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta\gamma}z=\frac{\beta\gamma-\gamma\alpha+\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$z=\alpha+\beta+\gamma$$ □

上の結果は，3 点が原点を中心とする半径が 1 でない円上にある場合にも成立する。三角形に対してその外心を原点とする座標系を**外心座標**という。その場合，三角形の性質の多くは相似拡大で不変だから，外接円の半径を 1 と仮定できることも多い。

問題 10 上の例題において，A から BC に下ろした垂線の足の座標は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\dfrac{\beta\gamma}{2\alpha}$ である。
[ヒント] 直線 BC の方程式と例題で求めた垂線の方程式の連立方程式を解く。

問題 11 三角形 ABC において，辺 BC,CA,AB の中点を L,M,N，各頂点 A,B,C から対辺に下ろした垂線の足を D,E,F，垂心を H として AH，BH，CH の中点を P，Q，R とすると，9 点 $P, Q, R, L, M, N, D, E, F$ は，外心と垂心の中点を中心，外接円の半径を直径とする円上にあることを証明せよ。（この円を九点円という）
[ヒント] 外心を原点，外接円の半径を 1 とする座標系において，3 頂点を $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ として各点の座標を求め，外心と垂心の中点を K とおき，K と 9 点との距離を求める。

問題 12 三角形において，外心，重心，九点円の中心，垂心は同一直線上にあることを示せ。（この直線をオイラー線という）

問題 13 4 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ が単位円の周上にあるとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数となることを示せ。[ヒント] z が実数 $\Leftrightarrow z=\overline{z}$

問題 14 三角形の外接円上の 1 点から 3 辺またはその延長上に下ろした垂線の足は同一直線上にあることを証明せよ。（この直線をシムソン線という）　[ヒント] 単位円に内接する三角形について証明すれば十分。3 頂点を α, β, γ，単位円上の点を w，垂線の足を z_1, z_2, z_3 として，$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ が実数であることを示す。

6.2.5　有向角

半直線 BA に対し半直線 BC がなす有向角を $\angle ABC$ で表す。
3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対し，$\overrightarrow{BA}=\alpha-\beta$，$\overrightarrow{BC}=\gamma-\beta$ なので

命題 12 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対し，$\angle ABC=\arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$

6.2.6　正三角形

問題 15 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする三角形が正三角形となるための必要十分条件は，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}$ が 1 の虚立方根 $(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$ となることであることを示せ。
[ヒント]$\triangle ABC$ が正三角形となる必要十分条件は，$AC=BC$ かつ $\angle BCA=\pm\dfrac{\pi}{3}$，すなわち，$|\gamma-\alpha|=|\gamma-\beta|$ かつ $\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\pm\dfrac{\pi}{3}$。$|\gamma-\alpha|=|\gamma-\beta|$ より $\left|\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right|=1$。

問題 16 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ または $\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma = 0$ は，3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする三角形が正三角形であるための必要十分条件であることを示せ。ただし，ω を 1 の虚立方根とする。
[ヒント] $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ なので $1 + \omega = -\omega^2$。また，1 の虚立方根の一方を ω とするともう一方は ω^2。

問題 17 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ は，3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする三角形が正三角形であるための必要十分条件であることを示せ。
[ヒント] $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ または $\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0$。$(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma)$ を展開してみる。

問題 18 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ が単位円上にあって $\alpha + \beta + \gamma = 0$ であるとき，$\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
[ヒント]3 点が単位円上にあることから $\alpha = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, $\beta = \dfrac{1}{\overline{\beta}}$, $\gamma = \dfrac{1}{\overline{\gamma}}$。また，$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$。

問題 19 三角形の各辺に対し，その辺を共有する正三角形を三角形の外側にかく。このとき，これら 3 つの正三角形の重心を頂点とする三角形は正三角形であることを示せ。
[ヒント]3 頂点を $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ とする。3 頂点 A, B, C がこの順で左まわりに並んでいるとき，辺 AB を共有する正三角形の残りの頂点を D とすると，$\overrightarrow{AD}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $-60°$ 回転したベクトルになっている。

6.2.7 円に内接する四角形

定理 13 （トレミー[2]の定理）四角形 $ABCD$ が円に内接するとき，

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

証明. $\dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{CD}{BD} + \dfrac{AD}{AC} \cdot \dfrac{BC}{BD} = 1$ を示せばよい。
各点の座標を $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ とする。
A,D は直線 BC に対し同じ側にあるから，$\dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \dfrac{\gamma - \delta}{\beta - \delta}$ は正の実数であり，
A,B は直線 CD に対し同じ側にあるから，$\dfrac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \dfrac{\gamma - \beta}{\delta - \beta}$ は正の実数である。

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{BD} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{BD} &= \frac{|\beta - \alpha|}{|\gamma - \alpha|} \cdot \frac{|\delta - \gamma|}{|\delta - \beta|} + \frac{|\delta - \alpha|}{|\gamma - \alpha|} \cdot \frac{|\gamma - \beta|}{|\delta - \beta|} \\
&= \left| \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\delta - \gamma}{\delta - \beta} \right| + \left| \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\delta - \beta} \right| \\
&= \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\delta - \gamma}{\delta - \beta} + \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\delta - \beta} \\
&= \frac{(\beta - \alpha)(\delta - \gamma) + (\delta - \alpha)(\gamma - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)} \\
&= \frac{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma + \gamma\delta}{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)} \\
&= 1 \quad \square
\end{aligned}$$

[2]プトレマイオス Ptolemaios (ギリシャの天文学者)

6.3 反転

6.3.1 反転変換

点 O を中心とする半径 r の円 C に関する反転とは，O を除く平面上の各点 P に対し，$OP \cdot OP' = r^2$ となる半直線 OP 上の点 P' を対応させる変換をいう。

命題 14 単位円に関する反転は，$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ で与えられる。

証明. $w\overline{z} = 1$ より $|w||\overline{z}| = 1$，$\arg w = -\arg \overline{z} = \arg z$ □

例題 15 a を $a > 0$ の実数とするとき，点 a を通り実軸に垂直な直線の単位円に関する反転の像を求めよ。

解. 反転による像を w とすると，$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ なる点 z は直線 $z + \overline{z} = 2a$ 上にある。

$z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ を直線の方程式に代入して，$\dfrac{1}{\overline{w}} + \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{w}}\right)} = 2a$

$$w\overline{w} - \frac{1}{2a}w - \frac{1}{2a}\overline{w} = 0$$
$$\left(w - \frac{1}{2a}\right)\overline{\left(w - \frac{1}{2a}\right)} = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ だから $w \neq 0$ であり，

逆に，$w \neq 0$ であれば，$z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ で定まる点 z は直線 $z + \overline{z} = 2a$ 上にあるから，

反転による像は，点 $\dfrac{1}{2a}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2a}$ の円から原点を除いた図形である。 □

問題 20 虚軸の単位円に関する反転の像を求めよ。

問題 21 a を $a > 0$ の実数とするとき，点 a を中心とする半径 r の円の単位円に関する反転の像を求めよ。[ヒント]$r = a$ のときと $r \neq a$ のときとに分ける。

6.3.2 変換 $w = \dfrac{1}{z}$

問題 22 点 z が円 $|z - (1 + i)| = 1$ 上を動くとき，$w = \dfrac{1}{z}$ で定まる点 w の軌跡を求めよ。
[ヒント]$z = \frac{1}{w}$ が円 $|z - (1 + i)| = 1$ 上にある。

問題 23 点 z が $1 + i$ を中心とする半径 1 の円の周上を動くとき，$w = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ で定義される点 w はどんな図形を描くか。
[ヒント]z を w で表す式を作る。

問題 24 変換 $w = \dfrac{1}{z}$ により，円または直線は円または直線に移る。