9 空間図形とベクトルの外積

9.1 空間図形の方程式

9.1.1 直線の方程式

例題 1 次の 2 点 A,B を通る直線の方程式を求めよ。
（1）A(1,2,3), B(4,5,1)
（2）A(2,4,3), B(2,2,6)
（3）A(2,4,3), B(2,4,1)
解 (1) 直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。
よって，$x-1=3t,\ y-2=3t,\ z-3=-2t$。$t$ を消去して,

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-2}$$

(2) 直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。
よって，$x-2=0,\ y-4=-2t,\ z-3=3t$。t を消去して,

$$x=2,\ \frac{y-4}{-2}=\frac{z-3}{3}$$

(3) 直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。
$x-2=0,\ y-4=0,\ z-3=-2t$ より,

$x=2,\ y=4,\ z$ は任意。

問題 1 次の 2 点 A,B を通る直線の方程式を求めよ。
（1）A(2,2,1), B(4,3,2)　（2）A(3,4,3), B(2,4,1)　（3）A(1,4,3), B(2,4,3)

命題 2 $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$ に平行で点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

ただし，分母が 0 のときは分子も 0 であると解釈する。

上の直線について，$\boldsymbol{u}$ をこの直線の方向ベクトルという。

問題 2 点 (1,4,0) から直線 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ に下ろした垂線の足の座標を求めよ。
[ヒント]$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}=t$ とおくと，$x=1+3t,\ y=2+t,\ z=3-2t$
垂線の足を $(1+3t_0, 2+t_0, 3-2t_0)$ とおく。

問題 3 次の 2 直線が交わるかどうか調べよ。

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1},\ \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$$

[ヒント] 第 1 式，第 2 式をそれぞれ，t,u とおき，2 直線の交点を求める。

問題 4 次の 2 直線が交わるかどうか調べよ。

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2},\ \frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$$

9.1.2　平面の方程式

1 直線上にない 3 点は 1 つの平面を定める。

1 直線上にない 3 点 A,B,C があるとき，点 P がこれら 3 点が定める平面上にあるための必要十分条件は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 λ, μ が存在することである。

問題 5 3 点 A,B,C は 1 直線上にないとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である点 P はこれら 3 点が定める平面上にあることを示せ。[ヒント] 平面上の 2 点を通る直線はその平面に含まれる。

問題 6 3 点 A,B,C は 1 直線上にないとするとき，点 P が 3 点 A,B,C が定める平面上にあれば，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 λ, μ が存在することを示せ。[ヒント] 直線 l と l 上にない 1 点 P があるとき，P を通って l に平行な直線は P と l が定める平面上にある。

例題 3 3 点 $\mathrm{A}(1, 1, -1)$,$\mathrm{B}(-1, 3, 3)$,$\mathrm{C}(1, 5, 0)$ を通る平面の方程式を求めよ。

解. 平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 λ, μ が存在する。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$x = (1 - \lambda - \mu) + (-1)\lambda + \mu \quad = 1 - 2\lambda \qquad ①$$
$$y = (1 - \lambda - \mu) + 3\lambda + 5\mu \quad = 1 + 2\lambda + 4\mu \qquad ②$$
$$z = -(1 - \lambda - \mu) + 3\lambda \quad = -1 + 4\lambda + \mu \qquad ③$$

①，②より λ を消去して　$x + y = 2 + 4\mu$　④

①，③より λ を消去して　$2x + z = 1 + \mu$　⑤

④，⑤から μ を消去して　$7x - y + 4z = 2$　⑥

逆に，⑥を満たす x, y, z に対し，⑤より μ を定め，さらに③を満たすように λ を定めれば①〜③が成立する。

よって，3 点 A,B,C を通る平面の方程式は　$7x - y + 4z = 2$ □

問題 7 3 点 $\mathrm{A}(2, 1, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2, 1)$, $\mathrm{C}(1, 0, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ。

問題 8 3 点 A,B,C が 1 直線上にないとき，点 P が A,B,C の定める平面上にあるための条件は，A,B,C,P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ とすると，

$$\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}, \qquad \lambda + \mu + \nu = 1$$

となる実数 λ, μ, ν が存在することである。

問題 9 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を一次独立な 2 つのベクトルとするとき，3 点 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a})$，$\mathrm{B}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u})$,$\mathrm{C}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v})$ は平面を定め，そのベクトル方程式は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}$　(λ ,μ は実数) である。

問題 10 前問の方程式を成分で表し，λ ,μ を消去すると，x, y, z に関する一次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ が得られる。ただし，a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 でない。

問題 11 3 点 $(1, 2, 3)$,$(3, 2, 1)$,$(-1, -1, -1)$ を通る平面の方程式を求めよ。
[ヒント] 前問を利用すると，求める方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とおくことができる。

問題 12 a, b, c のうち少なくとも 1 つが 0 でないとき，一次方程式 $ax+by+cz+d=0$ を満たす点 (x,y,z) の軌跡は平面である。
[ヒント] $a \neq 0$ のときを示せば十分。$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$ より
$(x,y,z) = (-\frac{d}{a},0,0) + y(-\frac{b}{a},1,0) + z(-\frac{c}{a},0,1)$　となるので，
点 (x,y,z) は平面 $(x,y,z) = (-\frac{d}{a},0,0) + \lambda\ (-\frac{b}{a},1,0) + \mu(-\frac{c}{a},0,1)$ (λ, μ は実数)
上の点である。さらに，この平面上の点に対し，方程式 $ax+by+cz+d=0$ が成立することを示せ。

問題 13 点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0)，$\boldsymbol{u} = (a,b,c) \neq (0,0,0)$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \perp \boldsymbol{u}$ である点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の軌跡は，平面 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ である。

9.1.3　法線ベクトル

$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{u}$ が平面 α の**法線ベクトルであるとは**，**平面**α 上の任意の 2 点 P,Q に対して $\boldsymbol{u} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となることをいう。

問題 14 1 直線上にない 3 点 A,B,C があるとき，$\boldsymbol{u} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{u} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{u}$ は 3 点 A,B，C が定める平面の法線であることを示せ。

問題 15 一次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，いずれとも垂直なベクトルを求めよ。

問題 16 平面の法線ベクトルの向きは一意的に定まる。すなわち，
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が 3 点 A,B，C が定める平面の法線ベクトルであれば $\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{v}$ であることを示せ。

問題 17 平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線ベクトルは (a,b,c) である。
（平行なベクトルのうちのひとつで代表させて，平面の法線ベクトルという。）

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるとき，2 直線 AB，CD は垂直であるという。（ねじれの位置にある場合を含むことに注意）

直線 l が平面 α と垂直であるとは，l が α 上の任意の直線と垂直であることをいう。

問題 18 直線が平面と垂直であるための必要十分条件は，直線の方向ベクトルと平面の法線ベクトルが平行となることである。

問題 19 平面 $ax+by+cz+d=0$ と原点との距離（原点 O から平面に下ろした垂線 OH の長さ）は $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ である。[ヒント]$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k(a,b,c)$ とおくことができる。

問題 20 平面 $ax+by+cz+d=0$ と点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ との距離は $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ である。

9.1.4 直線と平面

問題 21 点 $(1,2,3)$ を通り，平面 $2x-3y+5z=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

問題 22 2 平面 $x+y+z=3, x+2y+3z=6$ の交線の方程式を求めよ。[ヒント] 交線は 2 平面の共通部分。

問題 23 2 平面 $x+y=1, 2y+z=1$ の交線を含み，原点を通る平面の方程式を求めよ。[ヒント] 平面 $k(x+y-1)+(2y+z-1)=0$ は 2 平面の交線を含む。

2 平面が平行であるとは，それらが共有点を持たないことをいう。

問題 24 2 平面 $ax+by+cz+d=0,\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ の平行条件は何か。

9.2 ベクトルの外積（ベクトル積）

定義 4 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対し，**外積**と呼ばれるベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ とおくとき，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

と書くこともできる。

命題 5 外積について次の法則が成立する。（k は実数）

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$
(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
(3) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
(5) $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$

問題 25 上の命題を証明せよ。

問題 26 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対し，
$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ である。

問題 27 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のいずれとも垂直なベクトルである。

問題 28 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\theta|$ である。

問題 29 3 点 O$(0,0,0)$,A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3) の座標を用いて $\triangle$OAB の面積を求める公式を作れ。

問題 30 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

問題 31 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$
[ヒント] 成分で表し，各成分を計算する。

例 6 （磁界を運動する荷電粒子が受ける力）
磁界を運動する荷電粒子が受ける力は，その向きは荷電粒子の運動と磁界のいずれにも垂直で，その大きさは，荷電粒子の速さと磁界の大きさの積に，荷電粒子の運動と磁界とがなす角の正弦を掛けたものに比例する。すなわち，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁界を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q は，$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の力を受ける。（磁界の強さを表す磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，この公式で比例定数が 1 となるように定められている。）

問題 32 交わる 2 直線 $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{4}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-5}$ を含む平面の法線ベクトルを求めよ。

2 平面 α,β が直線 l で交わるとき，l と垂直な α 上の直線 m と，l と垂直な β 上の直線 n とのなす角を α,β がなす角という。

問題 33 2 平面 $x-2y+3z=4,\ 2x+3y-z=5$ のなす角を求めよ。

問題 34 2 平面がなす角は，2 平面の法線ベクトルのなす角と一致する。（補角は同一とみなす）
[ヒント]2 平面の交線の方向ベクトルを $\boldsymbol{a}$，第 1，第 2 の平面上で $\boldsymbol{a}$ と垂直なベクトルを $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ とすると，2 平面のなす角の余弦は $\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}$，法線ベクトルがなす角の余弦は $\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|}$。

9.2.1 正射影

点 P から平面 α に下ろした垂線の足を，点 P の平面 α に対する正射影という。

問題 35 点 P(1,2,3) の平面 $3x+4y-2z+6=0$ に対する正射影を求めよ。
[ヒント] 正射影を P$'$ とすると，PP$'$ は平面の法線と平行で P$'$ は平面上にある。

問題 36 直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-3}{3}$ の平面 $5x+3y-4z+10=0$ に対する正射影を求めよ。

問題 37 直線と平面のなす角をどう定義するのが合理的か考察せよ。

問題 38 直線 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{z-3}{3}$ と平面 $5x + 3y - 4z + 10 = 0$ のなす角の余弦を求めよ。