11 球面の幾何学

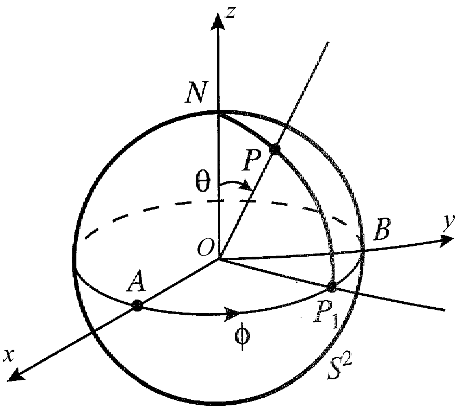
11.1 球面の座標

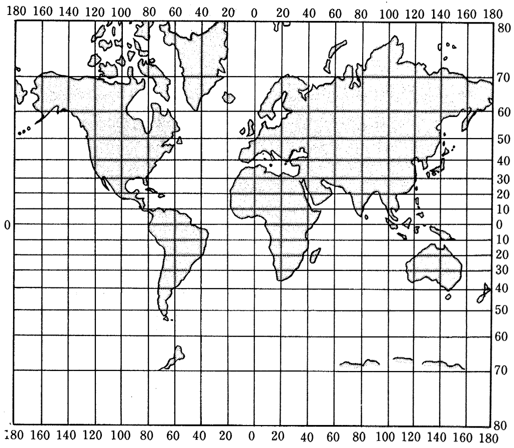
11.1.1 極座標

原点を中心とする半径 1 の球を単位球という。単位球を S^2 で表す[1]。以後，特に断らない限り単位球のみを扱う。

球面 S^2 上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対し，半直線 OP と z 軸の正の向きのなす角 θ を**天頂角**，点 P の xy 平面への正射影を点 $\mathrm{P}'(x,y,0)$ とするとき，xy 平面上で半直線 OP' が x 軸の正の向きとなす角 ϕ を**方位角**という。

すなわち，$x=\sin\theta\cos\phi,\ y=\sin\theta\sin\phi,\ z=\cos\theta$。





地球を真球とみなし，地球の中心を原点，地球の半径を 1 とする座標系を考えるとき，北極を点 N(0,0,1)，緯度，経度がそれぞれ 0° の点を A(1,0,0) とする座標を入れると，天頂角は，北極が 0°，赤道が 90°，南極が 180° であり，方位角は東経と一致し，負の方位角が西経に対応する。

たとえば，東京はおよそ北緯 36°，東経 140° であるので，天頂角はおよそ 54°，方位角はおよそ 140° である。ブラジルのリオデジャネイロは，およそ南緯 23°，西経 43° であるので，天頂角はおよそ 113°，方位角はおよそ −43° である。

11.1.2 球面上の距離

中心を通る平面による球の切り口を**大円**という。球面上の 2 点間の距離は 2 点を通る大円の短いほうの弧（劣弧という）の長さである。

例題 1 東京とリオデジャネイロの間の地表面に沿った距離を求めよ。ただし，地球は周が 40000km の真球であると仮定する。

解. 東京，リオデジャネイロをそれぞれ P, Q で表すと，座標はそれぞれ，

$\mathrm{P}(\sin 54^\circ\cos 140^\circ, \sin 54^\circ\sin 140^\circ, \cos 54^\circ)$,

$\mathrm{Q}(\sin 113^\circ\cos(-43^\circ), \sin 113^\circ\sin(-43^\circ), \cos 113^\circ)$

である。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とすると，

[1]球面を英語で sphere という。

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$
$= \sin 54^\circ \cos 140^\circ \sin 113^\circ \cos(-43^\circ) + \sin 54^\circ \sin 140^\circ \sin 113^\circ \sin(-43^\circ) + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$
$= \sin 54^\circ \sin 113^\circ(\cos 140^\circ \cos(-43^\circ) + \sin 140^\circ \sin(-43^\circ)) + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$
$= \sin 54^\circ \sin 113^\circ \cos(140^\circ - (-43^\circ)) + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$
$= \sin 54^\circ \sin 113^\circ \cos 183^\circ + \cos 54^\circ \cos 113^\circ$
$\fallingdotseq -0.973349473739382$ だから $\theta \fallingdotseq 166.7^\circ$。

よって，地表面に沿って測った距離は，およそ $40000\times\dfrac{166.7}{360} \fallingdotseq 18500(\mathrm{km})$ である。 □

問題 1 2 地点の緯度，経度から 2 地点間の地表面に沿った距離を求める公式を求めよ。ただし，緯度は北緯を正の数，南緯を負の数，経度は東経を正の数，西経を負の数で与えるものとする。

問題 2 仙台とサンフランシスコはどちらも北緯 38 度付近に位置する。仙台は東経 141 度にあり，サンフランシスコは西経 122 度にある。大円に沿って測った距離と，緯線に沿って測った距離を求めよ。

11.1.3 球面三角形

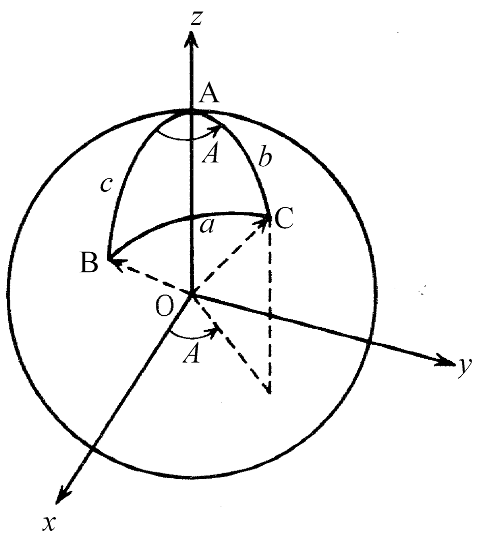
S^2 上の 3 点 A, B, C に対し，球面三角形 ABC は，大円の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{BC}}, \overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ で囲まれた図形である。ただし，大円の弧は短い側を取るものとする。弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{BC}}, \overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ を辺と呼び，その長さを c, a, b で表す。角の大きさの単位をラジアンにとれば，それらは，各弧に対する中心角の大きさに等しい。また，頂角 A, B, C は，各頂点で交わる大円を含む 2 平面の交角である。

定理 2 球面三角形 ABC に対し，$\cos a = \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c$ (**余弦定理**)

すなわち， $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

証明. 球面上で三角形を回転させて，A を点 $(0,0,1)$ に移し，B を方位角が 0 の点に移す。このとき，B の天頂角は c であり，点 C の天頂角は b，方位角は A である。

したがって，頂点 B, C の座標は，
$\mathrm{B}(\sin c, 0, \cos c)$
$\mathrm{C}(\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$



a は弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中心角だから，
$\cos a = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b$ □

定理 3 球面三角形 ABC に対し，$\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ (**正弦定理**)

証明. 余弦定理より，$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \dfrac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

□

定理 4 球面三角形 ABC に対し，$\cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$
すなわち，$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C$

証明. 余弦定理より，$\cos a = \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c$
$\cos b = \sin c \sin a \cos B + \cos c \cos a$
第 2 式を第 1 式に代入して

$$\cos a = \sin b \sin c \cos A + (\sin c \sin a \cos B + \cos c \cos a)\cos c$$
$$\cos a = \sin b \sin c \cos A + \sin c \sin a \cos c \cos B + \cos^2 c \cos a$$
$$\cos a = \sin b \sin c \cos A + \sin c \sin a \cos c \cos B + (1 - \sin^2 c)\cos a$$
$$\sin^2 c \cos a = \sin b \sin c \cos A + \sin c \sin a \cos c \cos B$$
$$\sin c \cos a = \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B$$

正弦定理を用いて

$$\sin C \cos a = \sin B \cos A + \sin A \cos c \cos B$$

2 頂点 A，C を入れ替えて

$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \sin C \cos a \cos B$$

最後の 2 式から $\cos c$ を消去して

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad \square$$

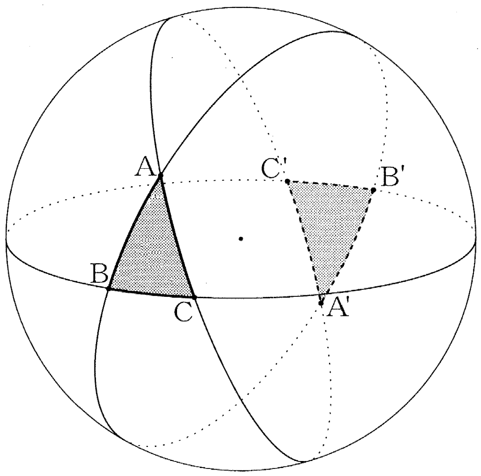
問題 3 球面三角形の合同条件（辺の長さと角の大きさを定める条件）は何か。また，3 辺の長さの比と 3 角の大きさが等しいための条件を相似条件と呼ぶと，相似条件は合同条件と同一であることを示せ。

11.1.4　球面三角形の面積

S^2 の表面積は 4π である。これを利用すると球面三角形の面積が求まる。

定理 5 球面三角形 ABC の面積は，$A+B+C-\pi$

証明. 球面三角形 ABC の面積を $\triangle$ABC で表す。
3 頂点 A, B, C の原点に関する対称点を A′, B′, C′ とする。



$\triangle$ABC+$\triangle$A′BC $= 2A$
$\triangle$ABC+$\triangle$AB′C $= 2B$
$\triangle$ABC+$\triangle$ABC′ $= 2C$
また，
$\triangle$ABC =$\triangle$A′B′C′, $\triangle$A′BC =$\triangle$AB′C′, $\triangle$AB′C =$\triangle$A′BC′, $\triangle$ABC′=$\triangle$A′B′C
で，これら 8 個の三角形で全球面を覆うから
$\triangle$ABC+$\triangle$A′BC + $\triangle$AB′C+$\triangle$ABC′ $= 2\pi$
よって，$\triangle$ABC $=A+B+C-\pi$ $\square$