

幾何学概論 (14) 平行線公理

平行線の性質

① 錯角が等しいとき 2 直線は平行である

② 平行な 2 直線が作る錯角は等しい

①は三角形の合同条件など他の定理から導くことができるが、②を他の定理から証明することができない。

1. 錯角・同位角・同側内角

2 直線に 1 直線が交わるとき、次の(1), (2), (3)は同値

(1) 同位角が等しい (2) 錯角が等しい (3) 同側内角の和が 180° である。

(注意) 1 組の同位角が等しければ、残りの同位角も等しい。他についても同様。

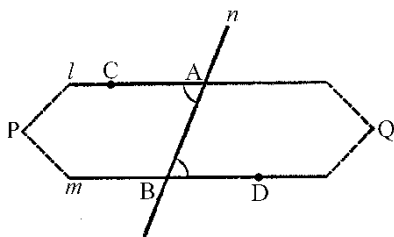
2. 平行線

(1) 定義 共有点を持たない 2 直線は平行であるという。

(2) 錯角が等しければ平行

定理 相異なる 2 直線 l, m に第 3 の直線 n が交わってできる錯角が等しいならば、 l, m は平行である。

証明



l と n の交点を A , m と n の交点を B とする。

錯角が等しいことから、 l 上の点 C と m 上の点 D が直線 n について反対の側にあつて、 $\angle CAB = \angle DBA$ 。

ここで、 l, m が交点 P を持つと仮定する。直線 n のどちら側にあつても同様な議論が可能なので、 P は C と同じ側にあるものとする。

半直線 BD 上に $AP = BQ$ となる点 Q をとる。すると、 $\triangle PAB$ と $\triangle QBA$ において、 $AP = BQ$, $AB = BA$, $\angle PAB = \angle QBA$ であるから、 $\angle PBA = \angle QAB$

したがつて、 $\angle QAB + \angle PAB = \angle PBA + \angle QBA$

P, Q は直線 m 上の点で n について反対側にあるから、 $\angle PBA + \angle QBA$ は平角である。

よつて $\angle QAB + \angle PAB$ も平角であり、3 点 Q, A, P は同一直線上にある。

A, P は l 上の点だから、これら 3 点は l 上にある。

l, m は直線 n について反対側にある (したがつて異なる) 2 点 P, Q を共有することとなり、矛盾する。ゆえに、 l, m は共有点を持たない。

3. 平行線公理

(1) 平行線の存在

定理 直線 l 上にない 1 点 A を通って l と平行な直線が存在する。

証明 錯角が等しくなるように直線を引けばよい。

(2) 平行線公理

次の命題を平行線公理という。

(*) 直線 l 上にない 1 点を通って l と平行な直線は高々 1 つしか存在しない。

定理 平行線公理は次の命題と同値である。

(**) 平行線 l, m に第 3 の直線 n が交わってできる錯角は等しい。

証明

(*) \Rightarrow (**)

l, n の交点を通って錯角が等しくなるように引いた直線を m' とすると, m' は l と平行だから(*)により m と m' が一致する。

(**) \Rightarrow (*)

m を点 A を通る l の平行線とする。

l 上に異なる 2 点 B, C をとり, 直線 AB について C と反対の側に $\angle ABC = \angle BAD$ となる点 D をとる。

m 上に, 直線 AB について点 C と反対側 (D と同じ側) に点 D' をとると, (**) より $\angle ABC = \angle BAD'$ 。よって, $\angle BAD = \angle BAD'$

D, D' は直線 BA について同じ側にあるから半直線 AD と半直線 AD' は一致する。

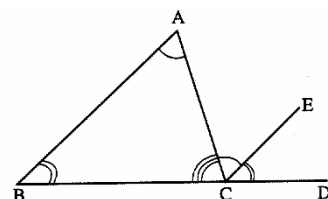
よって, m は直線 AD と一致する。

4. 三角形の内角の和

定理 平行線公理のもとで三角形の内角の和は 180° である。

証明 右図

(参考) 任意の三角形の内角の和が 180° であるためには平行線公理が成立することが必要である。(証明略)



5. 平行四辺形

定理 四角形 $ABCD$ において, 次の(1)~(3)は同値である。

(1) $AB \parallel DC$, かつ, $BC \parallel AD$

(2) $AB \parallel DC$, かつ, $AB = DC$

(3) $AB = DC$, かつ, $BC = AD$

問題 1 上の定理を証明せよ。

問題 2 平行線公理を仮定しないと, 上の定理はどうなるか。

6. 相似

平行線と比例の関係にも平行線公理が仮定されている。相似であるが合同でない図形が存在する幾何学では平行線公理が必須であることが知られている。