幾何学 I (15) 点と線の幾何学

1.　一筆書き

(1) 点の次数

グラフの頂点 P に対し，P を含む辺の本数を P の次数といい，$\deg(P)$で表す。

補題　グラフにおいて，頂点の次数の和は偶数（辺の数の 2 倍）である。

次数が偶数である点を**偶点**，次数が奇数である点を**奇点**という。

補題　グラフにおいて，奇点の個数は偶数個である。

(2) グラフの連結成分

辺をたどって頂点 P から頂点 Q へ行くことができるとき，P～Q と書くことにする。

P～P

P～Q ならば Q～P

P～Q，Q～R ならば P～R

が成り立つから，関係～によってグラフの頂点を分類することができる。

P～Q であるような点 Q と，それらを端点にもつ辺とからなるグラフを P の連結成分という。P の連結成分は連結である。また，異なる連結成分は頂点も辺も共有しない。

(3) 累積帰納法

$P(n)$を自然数 n に関する条件命題とする。

$\forall n\ [\forall k[k<n\to P(k)]\to P(n)]\quad\Rightarrow\quad\forall nP(n)$

を累積帰納法の原理という。

(4) 一筆書き

ある頂点から出発してすべての辺をちょうど 1 回通ってはじめの点に戻る一筆書きを閉じた一筆書きという。また，ある頂点から出発し，すべての辺をちょうど 1 回通って別の頂点に至る一筆書きを開いた一筆書きという。便宜上，1 点のみからなる(辺を持たない)グラフは閉じた一筆書きを持つものと約束する。

定理１　連結グラフ G が閉じた一筆書きをもつ必要十分条件は，そのグラフが奇点を持たないことである。このとき，任意の点から始まる一筆書きが存在する。

定理２　連結グラフ G が開いた一筆書きをもつ必要十分条件は，そのグラフがちょうど 2 個の奇点を持つことである。このとき，一筆書きは奇点と奇点を結ぶ。

証明　２つの定理をまとめて証明する。

必要性は明らかなので，十分性を示す。

辺の本数に関する数学的帰納法（累積帰納法）を用いる。

（１）2 個の奇点を持つとき

奇点を A，B とする。A とつながった辺をひとつ取り除く。取り除かれた辺のもう一方の端を C とし，A を含む連結成分を G_A，C を含む連結成分を G_C とする。このとき，B は G_A，G_C いずれかの頂点であり，また，G_A，G_C は辺の数が元のグラフより少ないから帰納法の仮

定をみたす。

ⅰ）$G_A=G_C$のとき

$B\neq C$のとき，B，Cはどちらも奇点だから，G_CはCからBに至る開いた一筆書きを持つ。$B=C$のとき，G_Cは奇点を持たないから，C を始点とする閉じた一筆書きをもつ。いずれの場合も，取り除いた辺と上の閉じた一筆書きを接続したものが求める一筆書きである。

ⅱ）$G_A\neq G_C$のとき

$B\neq C$のとき，B，Cはどちらも奇点だから，BはG_Cの頂点である。なぜなら，そうでないとすると，奇数個の奇点をもつグラフが存在することになるから。だから，G_CはCからBに至る開いた一筆書きを持つ。$B=C$のとき，G_Cは奇点を持たないから，C を始点とする閉じた一筆書きをもつ。したがって，いずれの場合も，G_CはCからBに至る一筆書きを持つ。また，G_Aは奇点を持たないから，Aを始点とする閉じた一筆書きを持つ。A を始点とする閉じた一筆書きに，取り除いた辺，およびCからBに至る一筆書きを接続したものが求める一筆書きである。

（２）奇点を持たないとき

1 点のみの場合は明らか。そうでないとき，任意の 1 辺を取り除く。このとき，2 個の奇点ができる。これら 2 点が異なる連結成分に分かれることはない。なぜなら，奇数個の奇点をもつグラフは存在しないから。したがって, これら 2 点を結ぶ開いた一筆書きが存在する。取り除いた辺とこの一筆書きを接続したものが求める一筆書きである。

（Note）この証明は具体的手順を示している。このような証明を構成的証明という。

＜参考＞

普通の数学的帰納法（高校でならった数学的帰納法）は,

$P(1)\wedge\forall m\,[P(m)\rightarrow P(m+1)] \quad\Rightarrow\quad \forall nP(n)$

である。

累積帰納法の原理は，普通の数学的帰納法から導かれる。

$\forall n\,[\forall k[k<n\rightarrow P(k)]\rightarrow P(n)]$　･･･（＊）　と仮定する。

$\forall k[k<m\rightarrow P(k)]$ を $Q(m)$とおくと,

$Q(1)$は形式的に成立し,

$Q(m)$と仮定すると，$\forall k[k<m\rightarrow P(k)]$だから,（＊）より $P(m)$が成り立ち,

$Q(m)$と $P(m)$から $Q(m+1)$が導かれる。

よって，数学的帰納法により，$\forall nQ(n)$

nを任意の自然数とすると，$Q(n+1)$より，$\forall k[k<n+1\rightarrow P(k)]$

ここで，$k=n$ の場合を考えると，$P(n)$

だから，$\forall nP(n)$

問題

次のグラフについて，定理の証明の手順にしたがって一筆書きを求める。
[注意] 長文のレポートになる。