# 1　2次曲線の変換

## 1.1　2次曲線の方程式

### 1.1.1　原点を中心とする回転

**命題 1** 原点を中心とする角 $\theta$ の回転は，次の式で表される一次変換である。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**証明.** 点 $P(x, y))$ が $P'(x', y')$ に移るものとする。
$OP$ が $x$ 軸の正の向きとなす角を $\alpha$，$OP = r$ とすると，
$x = r\cos\ \alpha$，　$y = r\sin\ \alpha$
$x' = r\cos(\ \alpha\ +\ \theta\ )$，$y' = r\sin(\ \alpha\ +\ \theta\ )$
であるので，
$x' = r\cos\ \alpha\ \cos\ \theta\ - r\sin\ \alpha\ \sin\ \theta\ = x\cos\ \theta\ - y\sin\ \theta$
$y' = r\sin\ \alpha\ \cos\ \theta\ + r\cos\ \alpha\ \sin\ \theta\ = x\sin\ \theta\ + y\cos\ \theta$　□

### 1.1.2　2次曲線の回転と平行移動

**例題 2** 楕円 $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ を原点を中心として $30°$ 回転して得られる楕円の方程式を求めよ。

**解.** 回転して得られた楕円上の任意の点を点 $P'(x', y')$ とすると，
楕円 $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $P(x, y)$ があって，点 $P$ が点 $P'$ に移される。すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

だから，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

すなわち，

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$$
$$y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

これを楕円の方程式に代入し

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2}{2} = 1$$

展開して整理すると

$$9x'^2 + 11y'^2 - 2\sqrt{3}x'y' - 24 = 0$$

習慣上，曲線の方程式は曲線上の点の座標を $(x, y)$ と仮定して答えるので，求める曲線の方程式は，$x', y'$ を $x, y$ に置き換えて

$$9x^2 + 11y^2 - 2\sqrt{3}xy - 24 = 0$$

□

**問題 1** 曲線 $x^2 + xy + y^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ を $x$ 軸方向に 1,$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ。

**問題 2** 放物線 $y^2 = 12x$ を原点を中心として $60°$ 回転して得られる放物線の方程式を求めよ。

**問題 3** 双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ を原点を中心として $45°$ 回転して得られる双曲線の方程式を求めよ。

## 1.2　2 次曲線の分類

**2 次曲線の方程式**　楕円，双曲線，放物線の方程式は，$x, y$ の 2 次式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0$$

に整理される。逆に，$x, y$ の 2 次式の表す図形を調べよう。

**問 3** (1) 原点を中心とする回転 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって移される図形の方程式を $x', y'$ を用いて表すことにする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

を上の方程式に代入して $x', y'$ に関する方程式を求めよ。
(2) $x'y'$ の項（$x'$,$y'$ の積の項）の係数が 0 となる条件を求めよ。
[ヒント] 結論は，$\cot 2\theta = \dfrac{C - A}{B}$　（$\tan 2\theta = \dfrac{B}{C - A}$）

**例題 4** 方程式 $3x^2-10xy+3y^2+14x-2y+3=0$ が表す図形は何か？

**解.** $\cot 2\theta = 0$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ とすると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

すなわち，

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y',\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

これを曲線の方程式に代入して整理すると，

$$8x'^2-2y'^2+8\sqrt{2}x'+6\sqrt{2}y'+3=0$$

これは

$$\frac{\left(x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1}-\frac{\left(y'-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}=-1$$

と変形できるから，双曲線である。 □

**問題 4** 方程式 $13x^2-10xy+13y^2-6x-42y-27=0$ が表す図形は何か？

**問題 5** 方程式 $13x^2-10xy+13y^2-6x-42y+45=0$ が表す図形は何か？

**問題 6** 方程式 $3x^2-10xy+3y^2+14x-2y-5=0$ が表す図形は何か？

**問題 7** 方程式 $x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}y-8=0$ が表す図形は何か？

**問題 8** 方程式 $x^2-2xy+y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-6=0$ が表す図形は何か？

一般に，$\cot 2\theta$ から $\cos\theta,\sin\theta$ を求めるのに，正接の 2 倍角の公式

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

と，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta,\ \sin\theta=\cos\theta\tan\theta$ を用いる。

**例題 5** 曲線 $7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-50=0$ が表す図形は何か。

**解.** $\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\cot 2\theta=\dfrac{-7-7}{48}=-\dfrac{7}{24}$ より，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ または $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$。
$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ を選ぶと，$\cos\theta=\pm\dfrac{4}{5}$
$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ を選んで，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を曲線の方程式に代入して整理すると，

$$(y'+2)^2-(x'-1)^2=1$$

これは, 双曲線を表す。 □

**問題 9** 方程式 $7x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 5 = 0$ が表す図形は何か？

**まとめ 6** $x, y$ の 2 次方程式が表す図形は，適当な回転を行うと，その方程式を $xy$ の項が 0 である 2 次方程式にすることができる。したがって，$x, y$ に関する 2 次方程式が表す図形は，楕円，双曲線，放物線，2 直線（一致する場合を含む），1 点，空集合のいずれかである。