2 円錐曲線

2.1 座標軸のまわりの回転

z 軸を中心とする角 θ の回転は，xy 平面上の回転を z 軸方向に拡張したものである。すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z' = z$$

x 軸を中心とする角 θ の回転は，yz 平面上の回転を x 軸方向に拡張したものである。すなわち，

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, x' = x$$

ただし，回転の正の向きは，y 軸の正の向きを z 軸の正の向きに重ねる向き。

y 軸を中心とする角 θ の回転は，zx 平面上の回転を y 軸方向に拡張したものである。すなわち，

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, y' = y$$

ただし，回転の正の向きは，z 軸の正の向きを x 軸の正の向きに重ねる向き。

2.2 円錐曲線

原点を頂点とし，平面 $z = 1$ における切り口が円 $x^2 + y^2 = r^2$ である円錐[1]の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2 z^2$$

である。

例題 1 円錐 $x^2 + y^2 = 3z^2$ を y 軸を中心に $60°$ 回転して得られる曲面の平面 $z = 2$ における切片を求めよ。

解. 変換を表す式は

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, y' = y$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix}, y = y'$$

[1]底面がなく，側面が無限に伸びたものを考えている。

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}z' \\
y &= y' \\
z &= \frac{1}{2}z' + \frac{\sqrt{3}}{2}x'
\end{aligned}
$$

で与えられる。

これを円錐の方程式に代入し，x', y', z' を x, y, z に書き換えて整理すると，

$$y^2 - 2x^2 - 2\sqrt{3}xz = 0$$

$z = 2$ を代入して

$$
\begin{aligned}
y^2 - 2x^2 - 4\sqrt{3}x &= 0 \\
2(x+\sqrt{3})^2 - y^2 &= 6 \\
\frac{(x+\sqrt{3})^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1
\end{aligned}
$$

これは，2 直線 $\sqrt{2}(x+\sqrt{3}) = \pm y$ を漸近線とする双曲線を表す。 □

問題 1 円錐 $x^2 + y^2 = 3z^2$ を y 軸を中心に 30° 回転して得られる曲面の平面 $z = 2$ における切片を求めよ。

問題 2 円錐 $x^2 + y^2 = z^2$ を y 軸を中心に 30° 回転して得られる曲面の平面 $z = 1$ における切片を求めよ。