3 複素数平面

3.1 複素数

3.1.1 複素数の演算

座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 点 $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ に対し，その積 $\alpha\beta$ を

$$\alpha\beta = (a_1 b_1 - a_2 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

で定める。和はベクトルとしての和の定義を踏襲する。この和と積の演算のもとで座標平面上の点を**複素数**という。

座標平面上の各点に複素数としての演算が定義されているとき，座標平面を**複素数平面**という。

複素数平面では，x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**ともいう。

複素数の計算について次の法則が成立する。ただし，$\mathbf{0} = (0, 0)$，$\mathbf{1} = (1, 0)$。

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

(3) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \beta\gamma$, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(4) $\alpha + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \alpha = \alpha$, $\alpha\mathbf{1} = \mathbf{1}\alpha = \alpha$

$\alpha \neq \mathbf{0}$ である任意の複素数 α に対し，$\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\alpha = \mathbf{1}$ となる複素数 $\boldsymbol{x}$ がただ一通りに定まる。この $\boldsymbol{x}$ を α^{-1} で表す。

具体的には，$\alpha = (a_1, a_2)$ であるとき，$\alpha^{-1} = \left(\dfrac{a_1}{{a_1}^2 + {a_2}^2}, \dfrac{-a_2}{{a_1}^2 + {a_2}^2}\right)$ である。

$\beta \neq \mathbf{0}$ である任意の複素数 α, β に対し，$\alpha = \beta\boldsymbol{x}$ となる複素数 $\boldsymbol{x}$ がただ一通りに定まる。この $\boldsymbol{x}$ を $\dfrac{\alpha}{\beta}$ で表す。

具体的には，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha\ \beta^{-1}$ である。

複素数 α, β に対し，$\alpha\beta = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$ または $\beta = \mathbf{0}$

なぜなら，$\alpha\beta = \mathbf{0}$ のとき $\alpha \neq \mathbf{0}$ とすると $\beta = \alpha^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるから。

複素数 $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し，$|\alpha| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ を α の絶対値という。$|\alpha|$ はベクトルの大きさである。

複素数 $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し，a_1 を実部，a_2 を虚部といい，それぞれ，$\mathrm{Re}(\alpha)$，$\mathrm{Im}(\alpha)$ で表す。

複素数 $\alpha = (a_1, a_2)$ に対し，$(a_1, -a_2)$ を α の **共役**（きょうやく） **複素数**といい，$\overline{\alpha}$ で表す。

複素数を平面上の点とみるとき, 共役複素数は x 軸に関して対称な点を表す。

共役複素数について，次の計算公式が成立する。

$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{(\dfrac{\alpha}{\beta})} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$, $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$, $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$

$\mathrm{Re}(\alpha) = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \mathrm{Im}(\alpha) = \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$

3.1.2 実数の拡張としての複素数

a, b が実数であるとき，複素数としての加法および乗法について

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\quad (a,0)(b,0)=(ab,0)$$

が成り立つ。そこで，複素数の計算に実数 a を書いたとき，それは $(a,0)$ を意味するものと解釈することとしても混乱は生じないから，そうすることとする。

また，k が実数で，α が複素数であるとき，$(k,0)\alpha=k\alpha$ だから，$k\alpha$ はベクトルの実数倍とみても複素数の積とみても混乱は生じない。

$(0,1)$ を i で表す。i を**虚数単位**という。

a,b を実数とするとき，bi を**純虚数**といい，$b\neq 0$ であれば $a+bi$ を**虚数**という。0 は虚数ではないが，純虚数である。$2i$, $3i$ などは虚数であり純虚数でもある。$1+2i$ は虚数であるが，純虚数ではない。

複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\overline{\alpha}=\alpha$ であり，α が純虚数であるための必要十分条件は $\overline{\alpha}=-\alpha$ である。

実数には正の数，負の数の別があるが，複素数に正負の別はない。

3.1.3 ベクトルと複素数

座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 点 $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ をベクトルとみなすと
内積 $\alpha\cdot\ \beta\ =a_1b_1+a_2b_2$ が定義される。

問 1 $\alpha\cdot\ \beta\ =\frac{1}{2}(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)$

3.1.4 複素数の極形式

x,y を少なくとも一方が 0 でない実数とするとき，

$$x=\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta,\ y=\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta$$

となる角 θ が存在し，2π のちがいを無視すれば一意的に定まる。

したがって, 複素数 z に対し，$|z|\neq 0$ のとき，$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ となる θ が 2π の違いを無視して一意的に定まる。この角 θ を z の**偏角**といって，$\arg z$ で表す[1]。また，$z=0$ のとき，$\arg z$ は任意の角を表すものとする。

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ （ただし，$r\geqq 0$）を**極形式**という。

極形式で表された複素数の積は次の公式で行うことができる。

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$。

なぜなら，

$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$\quad=\cos\ \theta_1\cos\ \theta_2-\sin\ \theta_1\sin\ \theta_2+i(\sin\ \theta_1\cos\ \theta_2+\sin\ \theta_1\cos\ \theta_2)$

$\quad=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$

Note. $(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $e^{i\theta}$ で表すと，上の公式は $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ と書け，指数法則を意味する。さらに，$e^{x+iy}=e^xe^{iy}$ として指数関数の複素数への拡張を定義することがある。

[1] arg は argument の略

3.1.5 偏角と絶対値

極形式の計算公式から，次のことがわかる。
複素数 z_1，z_2 に対し，
$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$
$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

Note. $\arg z$ は，2π を法とする剰余系で考える。
すなわち，偏角を $-\pi < \arg z \leqq \pi$，あるいは，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ なる角として定義するとしたら，2 番目の等式は，$\arg z_1 z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$ を意味する。

3.2 平面上の合同変換

3.2.1 平面上の変換

複素数を利用すると，平面上の合同変換・相似変換の記述ができる。
通常，複素数平面上の点を表す変数として z を用い，写像 $z \mapsto f(z)$ を $w = f(z)$ と書く。
写像 $w = (\cos\theta + i\sin\theta)\ z$ は，原点を中心とする角 θ の回転を表す。
k を正の数とするとき，写像 $w = kz$ は原点を中心とする k 倍の拡大を表す。
写像 $w = \overline{z}$ は実軸に関する対称移動を表す。
α を複素数の定数とするとき，写像 $w = z + \alpha$ はベクトル α の平行移動を表す。

問 2 上記，各写像の逆写像はいかなる写像か。

3.2.2 回転

点 α を中心とする角 θ の回転は，$w = (\cos\theta + i\sin\theta)\ (z-\alpha) + \alpha$ で表される。
なぜなら，この回転で点 z が点 w に移るとき，点 $w-\alpha$ は点 $z-\alpha$ を原点を中心として θ 回転した点であるので，$w - \alpha = (\cos\theta + i\sin\theta)\ (z-\alpha)$。
次の例題のようにベクトルとして捉えると考えやすい。

例題 3 点 $\alpha = 6 + 4i$ を中心とする $\dfrac{\pi}{6}$ の回転を複素数を用いて表せ。

解. $w-\alpha$ は $z-\alpha$ を $\dfrac{\pi}{6}$ 回転したベクトルだから
$w - \alpha = (\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})\ (z-\alpha)$
よって，$w = (\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i)(z-\alpha) + \alpha = (\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i)z + (1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i)\alpha$
すなわち，$w = (\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i)z + \left(8 - 3\sqrt{3}\right) + (1 - 2\sqrt{3})i$ □

3.2.3 鏡映

平面上の線対称移動を**鏡映**ともいう。

原点を通り実軸の正の向きとなす角が θ の直線に関する鏡映は，
$w = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\overline{z}$ で表される。

なぜなら，この鏡映で点 z が点 w に移るとき，点 z を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点と，点 w を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点とは，実軸について対称であるので，$\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}w = \overline{\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}z}$。

例題 4 原点を通り実軸の正の向きとなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である直線に関する鏡映を複素数を用いて表せ。

解. w を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点は，z を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点と実軸について対称だから，

$$\begin{aligned}
\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\}w &= \overline{\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\}z} \\
w &= (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\overline{\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\}z} \\
&= (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\overline{z} \\
&= (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})\overline{z}
\end{aligned}$$

よって，$w = (-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)\overline{z}$ □

問題 1 変換 $w = i\overline{z}$ はいかなる変換か？

問題 2 点 α を通り実軸の正の向きとなす角が θ の直線に関する鏡映は，
$w = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\overline{z} - \overline{\alpha}) + \alpha$ で表される。
[ヒント]　点 $z - \alpha$ と点 $w - \alpha$ はいかなる関係にあるか？

問題 3 次の変換を複素数を用いて表せ。
(1) 直線 $y = \sqrt{3}x + 1$ に関する鏡映
(2) 直線 $x + y = 2$ に関する鏡映
(3) 直線 $x = a$（実軸上の点 a を通り実軸に垂直な直線）に関する鏡映

3.3　変換の合成

例題 5 変換 $w = 2z + 3$ と変換 $w = 4z + 1$ の合成を表す方程式を求めよ。

解. 変換 $w = 2z + 3$ によって z が w に移り，変換 $w = 4z + 1$ によって w が v に移ると，
$w = 2z + 3, v = 4w + 1$ なので
$v = 4w + 1 = 4(2z + 3) + 1 = 8z + 13$
よって合成変換を表す方程式は，$w = 8z + 13$ □