

## 4 表向き合同変換

### 4.1 回転と平行移動

#### 4.1.1 回転・平行移動を表す数式

##### 平行移動

点  $P(z)$  を  $\beta$  平行移動した点を  $Q(z')$  とすると  $z' = z + \beta$

##### 回転移動

点  $A(z_0)$  を中心として点  $P(z)$  を  $\theta$  回転した点を  $Q(z')$  とする。

このとき、点  $Q'(z' - z_0)$  は点  $P'(z - z_0)$  を原点を中心として  $\theta$  回転した点なので、

$$z - z_0 = (\cos \theta + i \sin \theta)(z - z_0)$$

$$z' = (\cos \theta + i \sin \theta)(z - z_0) + z_0$$

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$  とおくと  $|\alpha| = 1$  であつて、

$$z' = \alpha(z - z_0) + z_0 = \alpha z - \alpha z_0 + z_0$$

#### 4.1.2 変換の合成

**問題 1** 複素数平面上で、点  $1$  を中心とする  $30^\circ$  回転と点  $i$  を中心とする  $60^\circ$  回転の合成を式で表せ。

**解** 点  $1$  と中心とする  $30^\circ$  回転で点  $z$  が点  $z'$  に移り、点  $i$  を中心とする  $60^\circ$  回転で点  $z'$  が点  $z''$  に移ると

$$z' =$$

$$z'' =$$

$$\therefore z'' =$$

#### 4.1.3 変換 $z' = \alpha z + \beta$ ( $|\alpha| = 1$ )

$|\alpha| = 1$  のとき、変換  $z' = \alpha z + \beta$  は、

$\alpha = 1$  のとき、平行移動、

$\alpha \neq 1$  のとき回転である。

なぜなら、 $\alpha \neq 1$  のとき、 $z' = \alpha z - \alpha z_0 + z_0$ 、すなわち、 $\beta = -\alpha z_0 + z_0$  となる  $z_0$  が存在するから。

具体的に計算すると、 $z_0 =$

**問題 2**  $\alpha \neq 1$  のとき、変換  $z' = \alpha z + \beta$  において  $z' = z$  となる  $z$  を求めよ。

変換  $z \mapsto z'$  において、 $z' = z$  となる  $z$  を (この変換の) 不動点という。 $\alpha \neq 1$  のとき、変換  $z' = \alpha z + \beta$  の不動点は回転の中心である。

**問題 3** 点  $1$  を中心とする  $30^\circ$  回転と点  $i$  を中心とする  $60^\circ$  回転の合成は、点  を中心とする  $^\circ$  回転である。

### 4.2 表向き合同変換

$|\alpha| = 1$  である複素数  $\alpha$  を用いて  $w = \alpha z + \beta$  の形に表される変換を表向き合同変換という。

**問題 4** 回転、平行移動は、表向き合同変換である。

**問題 5** 表向き合同変換と表向き合同変換の合成は表向き合同変換である。

**問題 6** 表向き合同変換は、回転、または、平行移動である。

(ヒント)  $\alpha = 1$  のとき平行移動,  $\alpha \neq 1$  のとき回転。

**問題 7** 変換  $w = iz + 2$  は、いかなる回転 (または平行移動) か。

*Note.* 回転のときは、中心と回転角の大きさ、平行移動のときは、それを表すベクトルを答える。

**問題 8** 次の合成変換は、いかなる回転 (または平行移動) か。

(1) 原点を中心として  $45^\circ$  回転し、点  $2i$  を中心として  $-45^\circ$  回転する。

(2) ベクトル  $1+i$  が定める平行移動を行い、点  $1-i$  を中心として  $90^\circ$  回転する。

**問題 9** 次の変換は、平行移動、回転のいずれか? 平行移動のときは変位を表す複素数、回転のときは中心と回転角を求めよ。注意 「 $f$  と  $g$  の合成」は、 $f$  の実行後に  $g$  を実行する。

①点  $i$  を中心とする  $60^\circ$  回転と点  $1$  を中心とする  $30^\circ$  回転の合成

②点  $1$  を中心とする  $60^\circ$  回転と点  $i$  を中心とする  $30^\circ$  回転の合成

③点  $1$  を中心とする  $90^\circ$  回転と点  $i$  を中心とする  $270^\circ$  回転の合成

④原点を中心とする  $90^\circ$  回転と  $1+i$  を変位ベクトルとする平行移動の合成

*Note.* 回転角は個々の回転の回転角の和。回転の中心は不動点を求めればよい。