5　鏡映と鏡映の合成

5.1　鏡映を表す方程式

5.1.1　x 軸に関する鏡映

平面上の線対称移動を鏡映という。
複素数平面上で点 $P(z)$ が実軸 (x 軸) に関する鏡映で点 $Q(z')$ に移るとき，$z' = \overline{z}$。

5.1.2　原点を通り x 軸となす角が θ の直線に関する鏡映

原点を通り実軸の正の向きとなす角が θ の直線に関する鏡映に点 $P(z)$ が点 $Q(z')$ に移るとき，
$z' = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)\overline{z}$。

5.1.3　x 軸となす角が θ の直線に関する鏡映

点 $A(z_0)$ を通り実軸となす角が θ の直線に関する鏡映により点 $P(z)$ が点 $Q(z')$ に移るとき，
$z' = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)\,\overline{(z - z_0)} + z_0$。

5.2　鏡映と鏡映の合成

5.2.1　合成変換を求める

問題 1 次の合成変換はいかなる変換か？

(1) 原点を通り実軸の正の向きとなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である直線に関する鏡映に続けて，原点を通り実軸の正の向きとなす角が $-\dfrac{\pi}{3}$ である直線に関する鏡映を行う。
(2) 原点を通り実軸の正の向きとなす角が θ_1 の直線に関する鏡映と原点を通り実軸の正の向きとなす角が θ_2 の直線に関する鏡映の合成
(3) y 軸に関する鏡映と直線 $x = a$ に関する鏡映の合成
(4) x 軸に関する鏡映と直線 $x = a$ に関する鏡映の合成
(5) 直線 $x = a$ に関する鏡映と x 軸に関する鏡映との合成

5.2.2　変換の表し方

直線 l に関する鏡映を σ_l で表す。
恒等変換を id で表す。
変換 f と変換 g の合成を $g \circ f$ で表す（逆順に書く)。

5.2.3　同一の直線に関する鏡映の合成

任意の直線 l に対し，$\sigma_l \circ \sigma_l = \mathrm{id}$

5.2.4　交わる 2 直線に関する鏡映の合成

点 z_0 を通り実軸の正の向きとなす角が α の直線に関する鏡映で点 $P(z)$ が点 $P'(z')$ に移り，点 z_0 を通り x 軸の正の向きとなす角が β の直線に関する鏡映により $P'(z')$ が点 $P''(z'')$ に移るとき，

$$\begin{aligned}
z' - z_0 &= (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)\overline{(z - z_0)} \\
z'' - z_0 &= (\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\overline{(z' - z_0)} \\
&= (\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\overline{(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)\overline{(z' - z_0)}} \\
&= (\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\overline{(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)}\,\overline{\overline{z' - z_0}} \\
&= (\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\overline{(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)}\,\overline{\overline{z' - z_0}} \\
&= (\cos 2\beta + i \sin 2\beta)\left\{\cos(-2\alpha) + i \sin(-2\alpha)\right\}(z - z_0)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad z'' - z_0 = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,(z - z_0)$$

すなわち，合成変換は　　　　　　　　　　　　　　　　である。

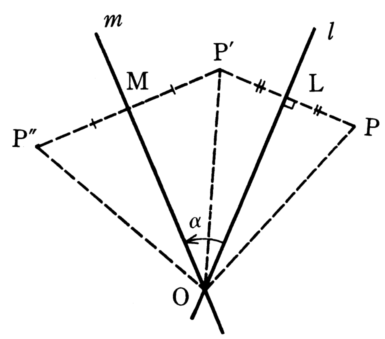
点 O で交わる 2 直線 l, m において，m が l に対しなす角を α とする（向きを考える)。

σ_l で点 P が点 P' に移り，σ_m で点 P' が点 P'' に移るとき，PP' と l の交点を L，$P'P''$ と m の交点を M とすると，

$OP = OP', OP' = OP''$

$\angle POL = \angle LOP', \angle P'OM = \angle MOP''$

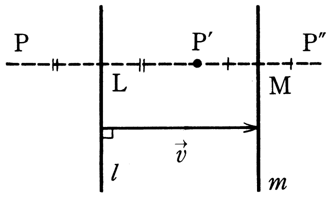
なので，P が図のような位置にあるとき，$\angle POP'' = 2\angle LOM$



問題 2 P が図と異なる位置にある場合，$\angle POP'' = 2\angle LOM$ は成立するだろうか？

5.2.5 平行 2 直線に関する鏡映の合成

下図のような位置に P があるときを考えると，平行 2 直線 l, m について，$\sigma_m \circ \sigma_l$ は $2\overrightarrow{v}$ の平行移動となるように思える。



このことを，式の計算を用いて確かめよう。

復習　複素数 α, β に対し，$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}$ は純虚数 $\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} =$ 　　　　　$\Leftrightarrow$

実軸の正の向きとなす角が θ である 2 直線 l, m に対し，l 上に 1 点 z_1 をとり，z_1 を通り l と垂直な直線と m との交点を z_2 とする。

σ_l で z が z' に移り，σ_m で z' が z'' に移るとき，$\cos 2\theta + i \sin 2\theta$ を α とおくと

$$z' = \alpha\overline{(z - z_1)} + z_1$$

$$z'' = \alpha\overline{(z' - z_2)} + z_2$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$\alpha\overline{\alpha} =$

$(\cos\theta + i \sin\theta) \perp (z_2 - z_1)$ なので,

$$=$$

$\therefore z'' =$