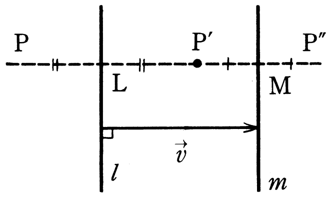
5.2.5 平行 2 直線に関する鏡映の合成

下図のような位置に P があるときを考えると，平行 2 直線 l, m について，$\sigma_m \circ \sigma_l$ は $2\overrightarrow{v}$ の平行移動となるように思える。



このことを，式の計算を用いて確かめよう。

復習　複素数 α, β に対し，$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}$ は純虚数 $\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = -\dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \overline{\alpha}\beta = -\alpha\overline{\beta}$

実軸の正の向きとなす角が θ である 2 直線 l, m に対し，l 上に 1 点 z_1 をとり，z_1 を通り l と垂直な直線と m との交点を z_2 とする。

σ_l で z が z' に移り，σ_m で z' が z'' に移るとき，$\cos 2\theta + i \sin 2\theta$ を α とおくと

$\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$\overline{\alpha} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$。

$\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$　であることにも注意して式変形する。

$z' = \alpha\overline{(z - z_1)} + z_1$

$z'' = \alpha\overline{(z' - z_2)} + z_2$

$\quad = \alpha\overline{(\alpha\overline{(z - z_1)} + z_1 - z_2)} + z_2$

$\quad = \alpha\overline{\alpha}(z - z_1) + \alpha\overline{(z_1 - z_2)} + z_2$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$ なので，$z'' = (z - z_1) + \alpha\overline{(z_1 - z_2)} + z_2 = z + (z_2 - z_1) - \alpha\overline{(z_2 - z_1)}$

$(\cos\theta + i\sin\theta) \perp (z_2 - z_1)$ なので,

$(\cos\theta + i\sin\theta)\overline{(z_2 - z_1)} = -\overline{(\cos\theta + i\sin\theta)}\,(z_2 - z_1)$

$\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$ なので,

$\alpha\overline{(z_2 - z_1)} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\overline{(z_2 - z_1)}$

$\qquad = -(\cos\theta + i\sin\theta)\overline{(\cos\theta + i\sin\theta)}\,(z_2 - z_1) = -\,(z_2 - z_1)$

$\therefore z'' = z + 2(z_2 - z_1)$