# 6　表向き合同変換と鏡映の合成

## 6.1　回転，平行移動を鏡映の合成で表す。

点 $P$ を中心とする角 $\theta$ の回転は，$P$ で交わりなす角が $\dfrac{\theta}{2}$ の 2 直線に関する鏡映の合成で表せる。
$\overrightarrow{v}$ の平行移動は，$\overrightarrow{v}$ と垂直で間隔が $\frac{\overrightarrow{v}}{2}$ の 2 直線に関する鏡映の合成で表せる。
以下，直線 $l$ に関する鏡映を $\sigma_l$ で表す。（$\sigma$ (シグマ) は symmetry の s に対応するギリシャ文字)
また，写像 $f$ と写像 $g$ の合成を $g \circ f$ で表す（逆順に書く）。

**問題 1** 点 $A$ と，$A$ を通る直線 $l$ がある。$\sigma_m \circ \sigma_l$ が点 $A$ を中心とする $60°$ の回転となるように直線 $m$ を描け。

**問題 2** 点 $A$ と，$A$ を通る直線 $m$ がある。$\sigma_m \circ \sigma_l$ が点 $A$ を中心とする $60°$ の回転となるように直線 $l$ を描け。

**問題 3** $\overrightarrow{v}$ と，$\overrightarrow{v}$ に垂直な直線 $l$ がある。$\sigma_m \circ \sigma_l$ が $\overrightarrow{v}$ の平行移動となるように直線 $m$ を描け。

**問題 4** $\overrightarrow{v}$ と，$\overrightarrow{v}$ に垂直な直線 $m$ がある。$\sigma_m \circ \sigma_l$ が $\overrightarrow{v}$ の平行移動となるように直線 $l$ を描け。

## 6.2 回転と回転，回転と平行移動，平行移動と回転の合成

**問題 5** 異なる *2* 点 $A, B$ がある。直線 $AB$ を $m$ とする。$\sigma_m \circ \sigma_l$ が点 $A$ を中心とする $60^\circ$ の回転となるような直線 $l$ と，$\sigma_n \circ \sigma_m$ が点 $B$ を中心とする $90^\circ$ の回転となるような直線 $n$ を描け。このとき，点 $A$ を中心とする $60^\circ$ の回転と点 $B$ を中心とする $90^\circ$ の回転の合成は $\sigma_n \circ \sigma_m \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_n \circ \sigma_l$ である。

**問題 6** 異なる *2* 点 $A, B$ がある。点 $A$ を中心とする $90^\circ$ の回転と点 $B$ を中心とする $60^\circ$ の回転の合成として得られる回転の中心を作図で求めよ。

**問題 7** 異なる *2* 点 $A, B$ がある。点 $A$ を中心とする $90°$ の回転と点 $B$ を中心とする $270°$ の回転の合成として得られる平行移動を表すベクトルを作図で求めよ。

**問題 8** 異なる *2* 点 $A, B$ がある。点 $A$ を中心とする $90°$ の回転と $\overrightarrow{AB}$ が定める平行移動の合成である回転移動の中心を作図で求めよ。

**問題 9** 異なる *2* 点 $A, B$ がある。$\overrightarrow{AB}$ が定める平行移動と点 $A$ を中心とする $120°$ の回転の合成である回転移動の中心を作図で求めよ。

### 6.2.1 回転と鏡映の合成

**問題 10** 直線 $l$ 上に点 $A$ があるとき，点 $A$ を中心とする $60°$ の回転を $\rho$（ロー）とする。$\rho = \sigma_l \circ \sigma_m$ となる直線 $m$ を描け。
このとき，回転と鏡映の合成 $\sigma_l \circ \rho$ は，$\sigma_l \circ \rho = \sigma_l \circ \sigma_l \circ \sigma_m = \sigma_m$，すなわち，直線 $m$ に関する鏡映である。

### 6.3 表向き合同変換と鏡映の合成

平行移動と回転は表向き合同変換である。表向き合同変換は 2 個の鏡映の合成で表され，逆に，2 個の鏡映の合成は表向き合同変換である。また，何個かの表向き合同変換の合成は表向き合同変換である。

平行移動と鏡映の合成について考える。

**命題 11** 平行移動の向きが鏡映の軸と垂直であるとき，平行移動と鏡映の合成は鏡映である。

**証明.** 平行移動を $\tau$, 鏡映を $\sigma_l$ とする。

$\tau = \sigma_l \circ \sigma_m$ となる直線 $m$ をとると，$\sigma_l \circ \tau = \sigma_l \circ \sigma_l \circ \sigma_m = \sigma_m$ ■

**問題 12** 平行移動の向きが鏡映の軸と垂直であるとき，鏡映と平行移動の合成は鏡映である。

### 6.4 合同変換

表向き合同変換と鏡映の任意の合成を合同変換という。

Note. 算数では,「ずらす」,「まわす」,「裏返す」で合同を定義している。だから，ここで定義する合同概念は，算数での合同に近い。中学校で学ぶ「合同」（辺と角が等しい）とは異なる。

表向き合同変換を鏡映の合成で表すことができるから，合同変換は何個かの鏡映の合成で表せる。そのとき，鏡映が偶数個であれば，順に 2 個づつ合成することで（何個かの）表向き合同変換の合成になり，それは最終的に (1 個の) 表向き合同変換になる。鏡映が奇数個のとき，同様にして，表向き合同変換と鏡映の合成になる。

**定理 13** 合同変換は 3 個以下の鏡映の合成で表せる。