7　合同変換

7.1　裏向き合同変換

複素数平面上で,

$|\ \alpha\ | = 1$ である複素数 α と，複素数 γ を用いて $w = \alpha z + \gamma$ の形に表される変換 $z \mapsto w$ を表向き合同変換という。

$|\ \alpha\ | = 1$ である複素数 α と，複素数 γ を用いて $w = \alpha \overline{z} + \gamma$ の形に表される変換 $z \mapsto w$ を裏向き合同変換という。

7.2　表向き合同変換と裏向き合同変換の合成変換

問題 1 裏向き合同変換と裏向き合同変換の合成は表向き合同変換である。
[ヒント] $z' = \alpha \overline{z} + \gamma, z'' = \beta \overline{z'} + \delta$，ただし $|\alpha| = 1, |\beta| = 1$ として，z'' を z で表す。

問題 2 表向き合同変換と裏向き合同変換の合成は裏向き合同変換である。

問題 3 裏向き合同変換と表向き合同変換の合成は裏向き合同変換である。

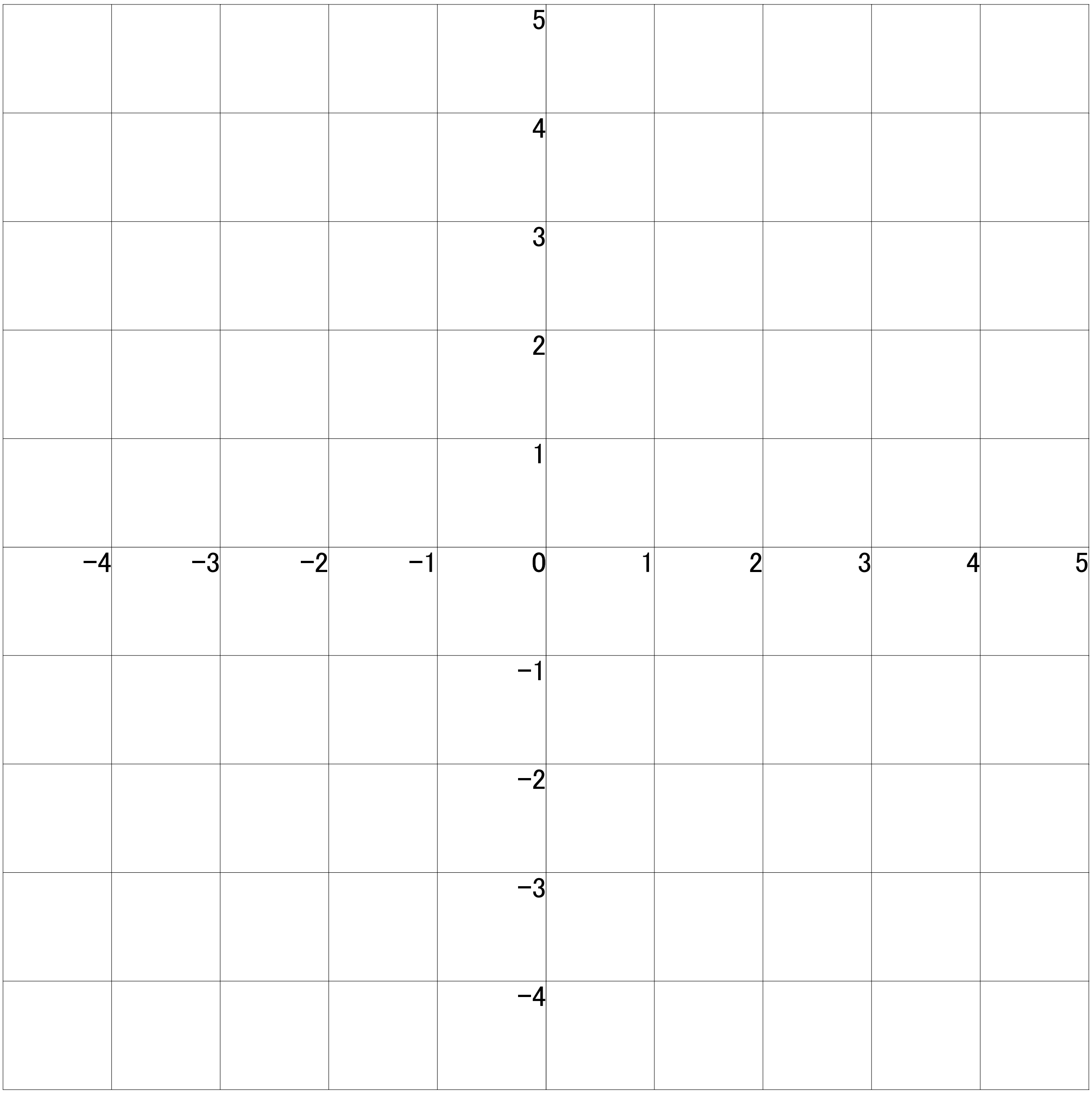
7.3　表向き合同変換の決定

表向き合同変換は，平行移動または回転なので，異なる 2 点の移動先から知ることができる。

定理 4 *2 点 A, B を平面上の異なる 2 点とする。表向き合同変換 f により，点 A が点 A' に移り，点 B が点 B' に移るとき，*
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ のとき f は平行移動,
$\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$ のとき f は回転であり，2 線分 AA', BB' の垂直 2 等分線が 1 点で交われば，その点が回転の中心である。

証明. 容易 ■

問題 5 原点を中心とする $90°$ の回転と，y 軸方向に 2 の平行移動の合成はある点を中心とする $90°$ 回転である。 その点を作図で求めよ。　*[ヒント]* たとえば，$A(0, 0), B(2, 0)$ の行き先を考える。



Note. 裏向き合同変換は，三角形の移動先から決定できる（後述）。