8 等長変換

8.1 平面

平面上の点全体の集合を $\mathbb{R}^2$ で表す。点，座標，ベクトルを区別せずに扱う。

点 (0,0) を原点といい，O または $\mathbf{0}$ で表す。

ベクトル $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$ の大きさを $|\boldsymbol{a}|$ で表す。$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$ である。

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1), \boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ に対し，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$（内積）とし，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を $\cos^{-1}\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ で定める。

（注）$\cos^{-1}x$ は，$x=\cos\theta$ となる θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）を表す。

(Note)　三角関数の理論は図形を離れて展開できる。

平面上の 2 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対し，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ を 2 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 間の**距離**といい，$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ で表す。

$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1), \boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ のとき，$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ である。

命題 1 *平面上の 2 点* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ *に対し，*$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

証明. $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1), \boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ とおく。$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=0\Leftrightarrow x_2=x_1$ かつ $y_2=y_1$ ■

8.2 等長変換

写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が**等長変換**であるとは，f が 2 点間の距離を変えないこと，すなわち，任意の 2 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対し $d(f(\boldsymbol{a}),f(\boldsymbol{b}))=d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ となることをいう。

等長変換と等長写像の合成は等長変換である。

平行移動，回転，鏡映は等長変換である。

したがって，合同変換は等長変換であるが，逆は自明ではない。

命題 2 *等長変換は単射である。*

Note. 写像 f が単射であるとは，$f(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{b})\Rightarrow\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ が成立すること。

証明. $f(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{b})$ とする。

f は等長変換なので，　$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=d(f(\boldsymbol{a}),f(\boldsymbol{b}))$

$f(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{b})$ より　$d(f(\boldsymbol{a}),f(\boldsymbol{b}))=0$

$\therefore$　$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$

$\therefore$　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ■

8.2.1 原点を動かさない等長変換

等長変換 f において，f と，$f(\mathbf{0})$ を $\mathbf{0}$ に移す平行移動との合成を g とすると，g は $\mathbf{0}$ を $\mathbf{0}$ に移す等長変換である（平行移動は等長変換であり，等長変換と等長変換の合成も等長変換だから）。

だから，任意の等長変換は，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ であるような等長変換 f と平行移動との合成で表される。

そこで，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ であるような等長変換 f の性質を調べることから始める。

命題 3 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ であるような等長変換 f は，内積を変えない。
すなわち，任意の 2 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対し，$f(\boldsymbol{a})\cdot f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ である。

証明. $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ とおき，
$f(\boldsymbol{a})=(x_1',y_1')$，$f(\boldsymbol{b})=(x_2',y_2')$ であるとする。
$d(\mathbf{0},f(\boldsymbol{a}))=d(\mathbf{0},\boldsymbol{a})$ より，

$d(\mathbf{0},f(\boldsymbol{b}))=d(\mathbf{0},\boldsymbol{b})$ より，

$d(f(\boldsymbol{a}),f(\boldsymbol{b}))=d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ より，

よって，

$$x_1'x_2'+y_1'y_2'=x_1x_2+y_1y_2$$

すなわち，

$$f(\boldsymbol{a})\cdot f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \quad \blacksquare$$

次の性質を持つ変換 f を線形写像という。
(1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$
(2) 任意の実数 k に対して $f(k\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x})$

命題 4 写像 f が内積を変えなければ，f は線形写像である。

証明. (1) $|f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2=0$ を示す。
$|f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2$
$=$

よって，$f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$
(2) k を定数とし，$|kf(\boldsymbol{x})-f(k\boldsymbol{x})|^2=0$ を示す。
$|kf(\boldsymbol{x})-f(k\boldsymbol{x})|^2=$

よって，$f(k\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x})$ $\blacksquare$

上の 2 つの命題から次の定理が得られる。

定理 5 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ であるような等長変換 f は，線形写像である。

平面上の線形写像 f において，$f(1,0)=(a,c)$, $f(0,1)=(b,d)$ とするとき，
$f(x,y)=f(x(1,0)+y(0,1))=xf(1,0)+yf(0,1)=x(a,c)+y(b,d)$
であるから，f は一次変換 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ である。
すなわち，
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ のように移す一次変換を表す行列は，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ である。

命題 6 行列 $\boldsymbol{A}$ で表される一次変換が等長変換であるとき，$\boldsymbol{A}$ は次のいずれかの形で表される。

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$$

証明. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{A}$ が表す一次変換を f とする。
$f(1,0)=(a,c)$，$f(0,1)=(b,d)$ であり，f は内積を保存するので，
$a^2+c^2=1^2+0^2=1,\ ab+cd=1\cdot0+0\cdot1=0,\ b^2+d^2=1^2+0^2=1$
$a^2+c^2=1$ だから，$a=\cos\theta, c=\sin\theta$ となる θ が存在する。
$ab+cd=0$ より，$b:d=-c:a=-\sin\theta:\cos\theta$
$b^2+d^2=1$ より，$b=\mp\sin\theta, d=\pm\cos\theta$ （複号同順） ■
まとめ　原点を動かさない等長変換は回転か鏡映のいずれかである。

8.2.2　一般の等長変換

平面上の等長変換 f が原点 O を点 A に移すものとする。このとき，f と，点 A を原点に移す平行移動との合成を g とおくと，g は原点を動かさない等長変換だから回転または鏡映であり，f は g と原点を点 A に移す平行移動との合成なので，f は合同変換である。

定理 7 平面上の等長変換は合同変換である。