9　三角形の合同条件

9.1　アファィン変換の決定条件

9.1.1　合同変換の行列表示

表向き合同変換　$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, $\beta = a + bi$ とする（ただし，θ, a, b は実数)。

表向き合同変換 $z' = \alpha z + \beta$ において，$z = x + yi, z' = x' + y'i$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

これを

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

裏向き合同変換　$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, $\beta = a + bi$ とする（ただし，θ, a, b は実数)。

裏向き合同変換 $z' = \alpha\overline{z} + \beta$ において，$z = x + yi, z' = x' + y'i$ とおくと，$\overline{z} = x - yi$ なので

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

これを

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & a \\ \sin\theta & -\cos\theta & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

9.2　アフィン変換

正則行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

の形に書くことのできる変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ をアフィン変換という。

正方行列 A が正則であるとは，A が逆行列を持つこと。

だから，アフィン変換には逆変換が存在する。

注意．A が正則でなくてもアフィン変換ということがある。その場合，A が正則となる場合は「正則アフィン変換」と呼ばれる。

9.3 行列式

正方行列 A に対し，$|A|$ で A の行列式を表す。$\det(A)$ と書かれることもある。

2 行 2 列の行列に対し

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 行 3 列の行列に対し

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{13} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{23} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{33}$$

正方行列 A が正則 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

問題 1 異なる *2* 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線の方程式は $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ である。

問題 2 *3* 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) が一直線上にある $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

命題 3 アフィン変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

は，一直線上にない異なる *3* 個の点の移動先で定まる。

証明. 一直線上にない 3 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) が写像 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ によって，

それぞれ，$(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3)$ に移るとすると，

$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ だから

$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ ■

Remark. たとえば，合同変換の合成を求めるとき，1 直線上にない 3 点の移り先が一致することを確かめれば，残りの点も正しく移ることが保証される。

9.4 三角形の合同条件

算数では，ずらす，回す，裏返すの操作で重なる図形を「合同」とよぶ。中学校では，対応する辺の長さと角の大きさが等しいとき「合同」という。この 2 つの「合同」は同じ概念なのだろうか。算数の意味で合同であれば中学校で学ぶ意味で合同になるのは直観的に肯定できるけれども，逆は明らかとは言い難い。

補題（2 円の交点）

問題 4 a, b, c を正の数とする。原点を中心とする半径 a の円と点 $(c, 0)$ を中心とする半径 b の円は，
(1) $a + b > c$ かつ $b + c > a$ かつ $c + a > b$ のとき x 軸について対称な *2* 点を共有，
(2) $a + b = c$ または $b + c = a$ または $c + a = b$ のとき x 軸上の *1* 点を共有，
(3) 上記以外のとき，*2* 円は共有点を持たない。
[ヒント]
$x^2 + y^2 = a^2, (x - c)^2 + y^2 = b^2$ から $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$
このとき，$y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x) = \left(a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)\left(a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)$
括弧のなかを通分して因数分解する。

（解答は別紙に書いてください。以下，同様)

9.4.1 三角形の合同（三辺合同定理）

平面上の図形は，平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合である。

平面上の図形 F, F' について，$f(F) = F'$ となる合同変換 f が存在するとき，F と F' は**合同**であるといって，$F \equiv F'$ で表す。

ただし，$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ のように書く場合は，集合として一致するだけではなく，点が $A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto F$ のように移ることも要求する。

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ であるとき，合同変換は等長変換なので，対応する辺の長さは等しい。

逆に，$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において対応する辺の長さがすべて等しいとき，$\triangle ABC$ を $\triangle DEF$ に移す合同変換は存在するだろうか？

平面上の 2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ について，
$d(A,B)=d(D,E), d(B,C)=d(E,F), d(C,A)=d(F,D)$ とする。

第 1 ステップ

A を D に移す平行移動によって $\triangle ABC$ を $\triangle DB'C'$ に移す。

平行移動は等長変換だから，$d(A,B)=d(D,B'), d(B,C)=d(B',C'), d(C,A)=d(C',D)$

したがって，$d(D,E)=d(D,B'), d(E,F)=d(B',C'), d(F,D)=d(C',D)$

第 2 ステップ

$d(D,B')=d(D,E)$ だから，D を中心とする回転で B' を E に移す。このとき，C' が C'' に移るものとする。

回転は等長変換なので，$d(B',C')=d(E,C''), d(C',D)=d(C'',D)$

したがって，$d(E,F)=d(E,C''), d(D,F)=d(D,C'')$

このとき，C'' が F と一致すれば，終わり。

第 3 ステップ

C'' が F と一致しないとき，直線 DE に関する対称移動を行う。

問題 5 このとき，C'' は F に移る。
[ヒント] 2 円の交点は高々 2 個で，2 個あるときそれらは 2 円の中心を結ぶ直線について対称である。

9.4.2 二辺夾角合同定理と一辺両端角合同定理

二辺夾角合同定理は，三辺合同定理を前提とすると，余弦定理から導ける。また，一辺両端角合同定理は，三角形の内角の和が 180° であることと正弦定理から導ける。

余弦定理，正弦定理と三角形の内角の和が 180° であることは，図形的な考察を離れて計算で示すことができる。ただし，三角関数の性質は既知とする。

また，$\triangle ABC$ において，頂角の大きさ $\angle A$ は，$\cos\angle A = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}$ で定義する。

以下，$\triangle ABC$ において，$d(A,B)=c, d(B,C)=a, d(A,C)=b$ とする。

すなわち，$|\overrightarrow{AB}|=c, |\overrightarrow{BC}|=a, |\overrightarrow{CA}|=b$。

9.4.3 余弦定理・正弦定理

問題 6 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$ *(余弦定理)*
すなわち，$\cos\angle A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
[ヒント] 一般に $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$ なので，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\right)$
だから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2)$

問題 7 $\sin\angle A = \dfrac{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{2bc}$
[ヒント] $\sin^2\angle A = 1-\cos^2\angle A = 1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$

命題 8 $\sin\angle A : \sin\angle B : \sin\angle C = a:b:c$ *(正弦定理)*

証明. $\sin\angle A = \dfrac{a\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{2abc}$

$$\sin\angle B = \frac{b\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{2abc}$$

$$\sin\angle C = \frac{c\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{2abc} \quad \blacksquare$$

9.4.4 三角形の内角の和

命題 9 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$

証明.

$$\begin{aligned}
\cos(\angle A+\angle B+\angle C) &= \cos(\angle A+\angle B)\cos\angle C - \sin(\angle A+\angle B)\sin\angle C \\
&= \cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C - \cos\angle A\sin\angle B\sin\angle C \\
&\quad - \cos\angle B\sin\angle A\sin\angle C - \cos\angle C\sin\angle A\sin\angle B \\
&= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac} \\
&\quad - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{2ca\cdot 2ab} \\
&\quad - \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{2bc\cdot 2ab} \\
&\quad - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{2bc\cdot 2ca} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$\blacksquare$