10　射影変換

10.1　透視投影

例 1 視点の高さを 1.5 m として，0.5 m 先に地平面に垂直に置かれたスクリーンに見えたとおりに写しとったとするとき，原点をスクリーン中央の地平面との接点に置くと，地平面上の点 (x, y) は，次式で定まるスクリーン上の点 (x', y') に写る。

$$y' = \frac{1.5y}{0.5 + y}$$
$$x' = \frac{0.5x}{0.5 + y}$$

問 2 上述を証明せよ。[ヒント] 中 3 相似の応用でも，ベクトルの応用どちらでもできる。

10.2　射影変換

10.2.1　射影変換とは

定義 3 平面上の変換 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ が正則行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \qquad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

と表されるとき，f は A により表される射影変換であるという。

例 4 アフィン変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ は，正則行列 $\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が表す射影変換である。

問 5 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則行列であるとき，$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則行列であることを確かめよ。

例 6 単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が表す射影変換は，恒等写像。

注意 7 $k \neq 0$ のとき，A と kA は同じ射影変換を表す。

例 8 例 1 は，$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$ が表す射影変換。この変換は

$$y' = \frac{3y}{1+2y}$$
$$x' = \frac{x}{1+2y}$$

とも書けるから，この射影変換を表す行列を $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすることもできる。

10.2.2 射影変換の合成

問題 1 射影変換 f，g がそれぞれ 3 次の正則行列 A，B により表されるとき，合成変換 $g \circ f$ は BA により表される。
[ヒント]$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$
$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$
$x' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$
$x'' = \dfrac{b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}, y'' = \dfrac{b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}$ として x'', y'' を x, y で表す。

問題 2 射影変換 f が 3 次の正則行列 A により表されるとき，逆行列 A^{-1} が表す射影変換は f^{-1} である。
[ヒント] 単位行列は恒等写像を表す。

10.2.3 射影変換の問題

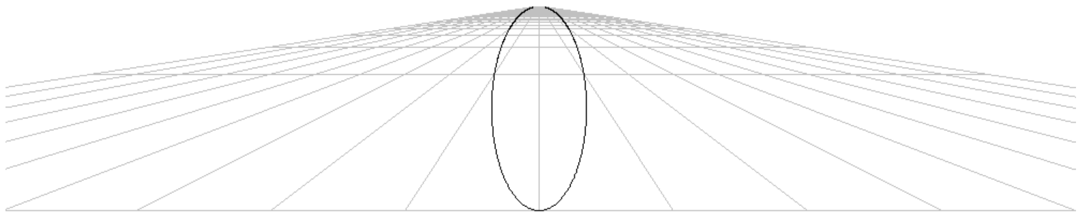
問題 3 (1) 例 1 の逆変換を求めよ。
(2) 次の直線，曲線の例 1 による像を求めよ。
(ア) $y = x + 1$　(イ) $y = 2x + 3$　(ウ) $y = x^2$　(エ) $x^2 + y^2 = 1$

問題 4 4 点 O(0,0)，A(1,0)，B(1,1)，C(0,1) をそれぞれ O，A′(2,1)，B′(4,5)，C′(1,3) に移す射影変換を求めよ。

10.3　射影変換の特徴

問題 5 射影変換は直線を直線に移す。
[ヒント] 直線の方程式を $y = mx + n$，射影変換 f の逆変換を $x = \frac{b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}$，$y = \frac{b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}}{b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}}$ とおく。

問題 6 射影変換は 2 次曲線を 2 次曲線に移す。
[ヒント]2 次曲線の方程式を $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ とおく。



命題 9 任意の 2 つの四角形 ABCD，四角形 A′B′C′D′ に対し，四角形 ABCD を四角形 A′B′C′D′ に移す射影変換が存在する。ただし，4 点が作る図形が四角形であるとは，それら 4 点がすべて異なり，かつ，どの 3 点も一直線上にないことである。