12　複素数平面上の変換

12.1　複素数

12.1.1　共役複素数

虚数単位を i で表す。すなわち，$i^2=-1$。

a,b を実数とするとき，複素数 $\alpha=a+bi$ に対し，$\overline{\alpha}=a-bi$ を α の **共役(きょうやく) 複素数**という。共役複素数は実軸に関して対称な点である。

共役複素数について，次の計算公式が成立する。

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$, $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$, $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$

α が実数 $\Leftrightarrow \overline{\alpha}=\alpha$，$\alpha$ が純虚数 $\Leftrightarrow \overline{\alpha}=-\alpha$。

12.1.2　偏角と有向角

複素数 α を $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ の形に表すことができる。$r>0$ のとき，この θ を α の**偏角**といって，$\arg\alpha$ で表す。

$\arg\alpha\beta\equiv\arg\alpha+\arg\beta \pmod{2\pi}$, $\arg\alpha/\beta\equiv\arg\alpha-\arg\beta \pmod{2\pi}$

$\arg\alpha=0 \pmod{\pi}\Leftrightarrow\alpha$ は実数,

複素数平面上の 3 点 $A(\alpha),B(\beta),C(\gamma)$ に対し，$\angle ABC=\arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ を $\overrightarrow{BC}$ が $\overrightarrow{BA}$ に対しなす**有向角**という。

12.1.3　平行条件と垂直条件

0 でない複素数 α,β について，

$$\alpha//\beta\Leftrightarrow\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta,\qquad\qquad \alpha\perp\beta\Leftrightarrow a\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0$$

12.2　図形の方程式

12.2.1　円の方程式

点 α を中心とする半径 r の円の方程式は $|z-\alpha|=r$ である。

これを変形すると，

$$(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=r^2$$

$$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+|\alpha|^2=r^2$$

問題 1　4 点 $A(\alpha),B(\beta),C(\gamma),D(\delta)$ が原点を中心とする半径 r の円の周上にあるとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数である。　[ヒント]z が原点を中心とする半径 r の円の周上の点 $\Leftrightarrow z\overline{z}=r^2\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{r^2}{z}$，$z$ が実数 $\Leftrightarrow\overline{z}=z$

問題 2 4 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ が同一の円の周上にあるとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数である。 [ヒント] 円の中心を z_0 として，$\alpha' = \alpha - z_0$ などとおく。

Note. $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}$ が実数であるとき，
$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} = 0$ または $\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} = \pi$

$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} = 0$ のとき，$\arg\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} = \arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ より $\angle ADC = \angle ABC$,

$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta} = \pi$ のとき，$\angle ABC + \angle CDA = \pm\pi$。

これらは，円周角の定理および円に内接する四角形の内角の和に関する定理を意味する。

12.2.2 直線の方程式

α を 0 でない複素数とするとき，点 z_0 を通りベクトル α に垂直な直線の方程式は

$$\alpha\overline{(z-z_0)} + \overline{\alpha}(z-z_0) = 0$$

すなわち，
$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = \alpha\overline{z_0} + \overline{\alpha}z_0$$

ここで，$\alpha\overline{z_0} + \overline{\alpha}z_0 = \alpha\overline{z_0} + \overline{\alpha\overline{z_0}}$ であるから，この方程式の右辺は実数である。

したがって，直線の方程式の一般形は，

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = c \quad (c\text{ は実数})$$

である。これは，$ax + by + c = 0$ に $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ を代入して整理すると，

$$\overline{(a+bi)}z + (a+bi)\overline{z} + 2c = 0$$

となることからも分かる。

また，点 z_0 を通り α に平行な直線の方程式は，

$$\overline{\alpha}(z-z_0) = \alpha\overline{(z-z_0)}$$

すなわち，
$$\overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} = \overline{\alpha}z_0 - \alpha\overline{z_0}$$
である。

ここで，$\overline{\alpha}z_0 - \alpha\overline{z_0} = \overline{\alpha}z_0 - \overline{\overline{\alpha}z_0}$ は純虚数であるから，α に平行な直線の方程式は

$$\overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} = ci \qquad (c\text{ は実数})$$

の形になる。

問題 3 a を実数とするとき，点 a を通り実軸に垂直な直線の方程式は $z + \overline{z} = 2a$ であることを示せ。

12.3 複素数平面上の変換

12.3.1 反転変換

点 O を中心とする半径 r の円 C に関する反転とは，O を除く平面上の各点 P に対し，$OP \cdot OP' = r^2$ となる半直線 OP 上の点 P' を対応させる変換をいう。

命題 1 単位円に関する反転は，$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ で与えられる。

証明. $w\overline{z} = 1$ より $|w||\overline{z}| = 1$，$\arg w = -\arg \overline{z} = \arg z$ なので，$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ は単位円に関する反転。 □

例題 2 a を $a > 0$ の実数とするとき，点 a を通り実軸に垂直な直線の単位円に関する反転の像を求めよ。

解. 反転による像を w とすると，$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ なる点 z は直線 $z + \overline{z} = 2a$ 上にある。

$z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ を直線の方程式に代入して，$\dfrac{1}{\overline{w}} + \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{w}}\right)} = 2a$

$$w\overline{w} - \frac{1}{2a}w - \frac{1}{2a}\overline{w} = 0$$

$$\left(w - \frac{1}{2a}\right)\overline{\left(w - \frac{1}{2a}\right)} = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

$w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ だから $w \neq 0$ であり，

逆に，$w \neq 0$ であれば，$z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ で定まる点 z は直線 $z + \overline{z} = 2a$ 上にあるから，

反転による像は，点 $\dfrac{1}{2a}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2a}$ の円から原点を除いた図形である。
□

複素数平面を $\mathbb{C}$ で表す。

問題 4 単位円に関する反転 $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ から $\mathbb{C} - \{0\}$ への全単射である。ただし，$\mathbb{C} - \{0\}$ は，$\mathbb{C}$ から点 0 を除外した集合を表す。

問題 5 虚軸の単位円に関する反転による像を求めよ。

問題 6 a を $a > 0$ の実数とするとき，点 a を中心とする半径 r の円の単位円に関する反転の $w = \dfrac{1}{z}$ による像を求めよ。[ヒント]$r = a$ のときと $r \neq a$ のときとに分ける。

12.3.2 変換 $w = \dfrac{1}{z}$

反転の場合と同様，変換 $w = \dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ から $\mathbb{C} - \{0\}$ への全単射である。

問題 7 変換 $w = \dfrac{1}{z}$ により，円または直線は円または直線に移る。

問題 8 変換 $w = \dfrac{1}{z}$ により，接する 2 円（または円と直線）は，接する 2 円（または円と直線）に移る。ただし，原点で接する場合を除く。

[ヒント] 接する 2 円の共有点は 1 つ。変換 $w = \dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C} - \{0\}$ 上の全単射。

問題 9 変換 $w = \dfrac{1}{z}$ によって $\dfrac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \cdot \dfrac{\gamma - \delta}{\alpha - \delta}$ は不変。すなわち，
$\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$, $\beta' = \dfrac{1}{\beta}$, $\gamma' = \dfrac{1}{\gamma}$, $\delta' = \dfrac{1}{\delta}$ のとき，$\dfrac{\alpha' - \beta'}{\gamma' - \beta'} \cdot \dfrac{\gamma' - \delta'}{\alpha' - \delta'} = \dfrac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \cdot \dfrac{\gamma - \delta}{\alpha - \delta}$