

13 複素数の一次分数変換

13.1 複素数平面上の変換

13.1.1 相似変換

α, β を複素数とする。

変換 $z \mapsto z + \alpha$ は平行移動である。

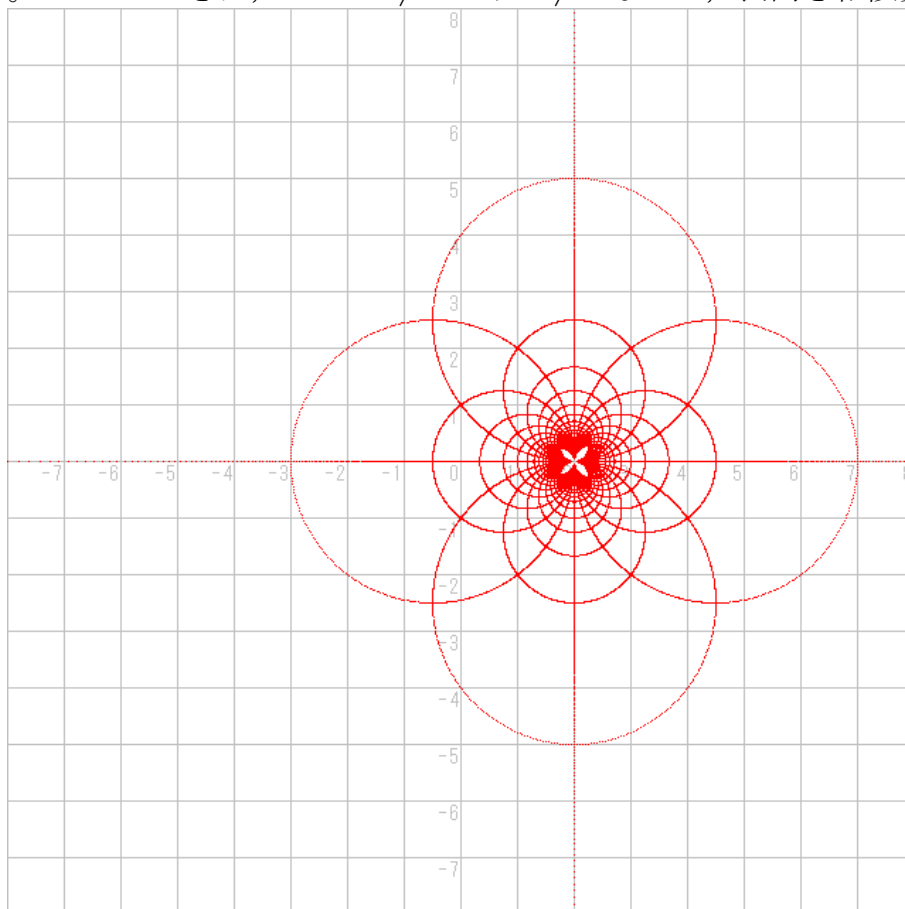
$\alpha \neq 0$ のとき、変換 $z \mapsto \alpha z$ は回転角 $\arg \alpha$ ，拡大率 $|\alpha|$ の回転拡大である。

さらに、 $\alpha \neq 0$ のとき、変換 $z \mapsto \alpha z + \beta$ および変換 $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$ は相似変換であり、複素数平面上の相似変換はこれらのいずれかで表される。変換 $z \mapsto \alpha z + \beta$ を表向き相似変換、 $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$ を裏向き相似変換という。

13.1.2 一次分数変換

$ad - bc \neq 0$ である複素数 a, b, c, d を用いて $w = \frac{az + b}{cz + d}$ の形に表される変換を一次分数変換という。

注意 $ad - bc \neq 0$ は、約分されて定数になってしまうのを避けるため必要な条件。 $c = 0$ のときは、 $ad - bc \neq 0$ より $a \neq 0$ なので、表向き相似変換。



平面上の格子 (銀) を $w = \frac{2z-3}{z+1}$ で変換 (赤)

問題 1 一次分数変換 $w = \frac{z-i}{z+i}$ は実軸を単位円に写す。

問題 2 $1, 1+i, i$ をそれぞれ (この順に) $1, 2, 3$ に写す一次分数変換を求めよ。

問題 3 一次分数変換と一次分数変換の合成は一次分数変換である。

[ヒント] $w = \frac{az+b}{cz+d}$ と $v = \frac{ew+f}{gw+h}$ を合成する。一次分数変換の定義を満たすこととの確認を忘れない。

問題 4 $c \neq 0$ のとき、一次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ を、平行移動、回転拡大、変換 $w = \frac{1}{z}$ の合成で表せ。[ヒント] $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}$

問題 5 変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ によつて $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \cdot \frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}$ は不変。すなわち、
 $\alpha' = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}, \beta' = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}, \gamma' = \frac{a\gamma+b}{c\gamma+d}, \delta' = \frac{a\delta+b}{c\delta+d}$ のとき、
 $\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma'-\beta'} \cdot \frac{\gamma'-\delta'}{\alpha'-\delta'} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} \cdot \frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}$

13.1.3 共役一次分数変換

$ad-bc \neq 0$ である複素数 a, b, c, d を用いて $w = \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}}$ の形に表される変換を共役一次分数変換という。共役一次分数関数は、一次分数関数に複素共役を合成した写像であるが、 $w = \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}}$ と表すこともできるから、複素共役と一次分数関数の合成でもある。

問題 6 共役一次分数関数と共役一次分数関数の合成は一次分数関数である。

問題 7 一次分数関数と共役一次分数関数の合成は共役一次分数関数である。

問題 8 共役一次分数関数と一次分数関数の合成は共役一次分数関数である。

問題 9 原点を中心とする半径 r の円に関する反転を表す方程式を求めよ。

問題 10 複素数 α を中心とする半径 r の円に関する反転を表す方程式を求めよ。